

DOI:10.16198/j.cnki.1009-640X.2019.04.008

宁利中, 张珂, 宁碧波, 等. 底部加热的两板间水平流动进口段流动特性分析[J]. 水利水运工程学报, 2019(4): 58-62. (NING Lizhong, ZHANG Ke, NING Bibo, et al. Analysis of entrance region of horizontal flow between two plates heated from bottom [J]. Hydro-Science and Engineering, 2019(4): 58-62. (in Chinese))

底部加热的两板间水平流动进口段流动特性分析

宁利中¹, 张珂¹, 宁碧波², 胡彪³, 田伟利⁴

(1. 省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室(西安理工大学), 陕西 西安 710048; 2. 嘉兴学院 建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 3. 江西省水利规划设计研究院, 江西 南昌 330029; 4. 上海大学 建筑系, 上海 200444)

摘要: 采用二维流体力学基本方程组对普朗特数 $Pr = 0.72$ 的具有水平流动的底部加热两板之间的流动特性进行数值模拟。结果表明, 对于给定相对瑞利数 r , 随着雷诺数 Re 的增加, 底部加热的两板之间依次出现定常对流滚动, 均匀行波对流滚动, 具有水平流动进口段的局部行波对流滚动及水平流动。对于相对瑞利数 $r = 3$, 在雷诺数 $9.0 < Re < 21.0$ 范围内, 系统是局部行波对流滚动, 存在水平流动进口段。随着雷诺数增加, 水平流动进口段长度增加。对于雷诺数 $Re = 25.0$, 在相对瑞利数 $4 < r < 12$ 范围内, 两板之间是局部行波对流滚动, 出现水平流动进口段。随着相对瑞利数增加, 水平流动进口段长度减小。最后给出了进口段长度随雷诺数或相对瑞利数变化的经验式。

关键词: 水平流动; 对流滚动; 进口段长度; 局部行波

中图分类号: O357 **文献标志码:** A **文章编号:** 1009-640X(2019)04-0058-05

底部加热两平板之间的对流问题被称为 Rayleigh-Benard 对流。关于这个问题的研究已有一百多年历史, 从最初的试验研究, 理论分析到近几十年的数值模拟, 研究工作一直吸引着科研人员的兴趣^[1-5]。数值模拟可分为基于简单振幅方程组或模型方程组的数值模拟, 利用扰动方程组的模拟, 以及利用流体力学方程组的数值模拟。特别是基于流体力学方程组的数值模拟大大推动了 Rayleigh-Benard 对流的研究, 揭示了许多新的现象。例如, 对于混合流体, 腔体中出现的行波、局部行波、具有不同结构的对流行波解等。这些都是单流体下没有观察到的。数值模拟的一个优点是通过模拟可以获得 Rayleigh-Benard 对流的微细结构, 这是实验中很难测量与观测的现象。因此, 数值模拟已成为研究底部加热两平板之间对流问题的有力工具。

给底部加热两板之间的对流施加一个水平流动, 形成一个新的对流系统^[6-10], 导致许多新现象的产生^[11-14]。对该系统的研究已获得许多进展, 但仍然有许多问题需要进一步深入研究。本文采用二维流体力学基本方程组对普朗特数 $Pr = 0.72$ 的具有水平流动的底部加热两板之间的流动特性进行数值模拟。

1 水平流动进口段及其数学模型

1.1 水平流动进口段

首先讨论具有水平流动的底部加热两板之间的流动问题。当底部加热两板之间的温度差超过临界值

收稿日期: 2018-12-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872164); 西北旱区生态水利国家重点实验室基金项目(2017ZZKT-2)

作者简介: 宁利中(1961—), 男, 陕西西安人, 教授, 博士, 主要从事对流动力学和高速水力学方面的研究。

E-mail: ninglz@xaut.edu.cn

时,底部加热两板之间发生对流现象,即在底部加热两板之间发生对流滚动。对于纯流体,这种对流滚动是定常的。如果给底部加热两板之间的对流施加一个水平流动,由于水平流动与底部加热两板之间的对流或者说底部加热两板之间温度差的热作用的竞争,导致两板之间出现复杂的对流斑图。在两板之间温度差与水平流动强度的某种组合下,系统中可能发生均匀行波对流或水平流动控制局面的现象。当两板之间温度差与水平流动强度在合适的参数范围时,两板之间发生水平流动与对流滚动联合出现的现象,即局部行波对流。也就是说,两板之间的上游区由水平流动控制,下游区则由行波对流滚动支配。将两板之间的上游区水平流动控制段称为水平流动进口段,如图1所示。水平流动进口段长度依赖于水平流动强度和两板之间温差变化。

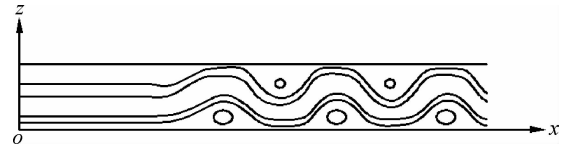


图1 具有水平流动的底部加热两板之间的流动
Fig.1 Flow between two plates heated from below with horizontal flows

1.2 数学模型

1.2.1 控制方程组

对于图1所示流动斑图,考虑 Boussinesq 假定,密度变化为 $\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$ 时,控制流动系统的流体力学方程组为:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{U} - \alpha(T - T_0) \mathbf{g} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \tag{3}$$

式中: $\mathbf{U}(u, v, w)$ 为速度矢量场; p 为压强; ρ 为密度; T 为温度; ν 为运动黏性系数; α 为体积膨胀系数, $\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho(T, p)}{\partial T}$; t 为时间; κ 为热扩散系数, $\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 C_p}$, C_p 为比热, λ 为热传导系数; $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, g 为重力加速度, \mathbf{e}_z 为 z 方向单位矢量。下标为 0 表示相应物理量的参考值。

这个流动系统由以下几个参数控制,表征温度差的瑞利数 $Ra = \frac{\alpha g d^3}{\kappa \nu} \Delta T$, 一般用相对瑞利数为 $r = Ra/Ra_c$ 来表示,临界值 $Ra_c = 1708$; 表征水平流动强度的雷诺数 $Re = \frac{u_{max} d}{\nu}$; 表示流体物性的普朗特数 $Pr = \nu/\kappa$ 。其中, d 为腔体高度; ΔT 为温度差, $\Delta T = T_d - T_u$, T_d 为下部平板温度, T_u 为上部平板温度; u_{max} 为水平流动最大流速。

1.2.2 边界条件和初始条件 上下壁面的流速为:在 $z = 0, d$ 时, $u = w = 0$ 。上下壁面温度恒定,即在 $z = 0$ 时, $T = T_d$; 在 $z = d$ 时, $T = T_u$ 。

左端部进口条件为:在 $x = 0$ 时, $u = 4u_{max} \frac{z}{d} \left(1 - \frac{z}{d}\right)$, $w = 0$, $T = T_0 + \Delta T \left(0.5 - \frac{z}{d}\right)$; 在 $x = L_x$ 时,右端部出口为自由出流, L_x 为腔体长度。

流速初始条件为: $u = w = 0$, 初始温度取平均值(一般 $T = 293.15 \text{ K}$)。

1.2.3 数值计算方法 根据有限容积法对流体力学基本方程组进行离散,采用 SIMPLE 算法对速度-压力方程进行数值求解。文献[9]对 $d/20$ 和 $d/30$ 两种网格的比较说明最大垂直流速很接近,因此,采用 $d/20$ 的网格。时间步长采用 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ 。为方便说明,坐标无量纲化为 $X = x/d$, $Z = z/d$ 。模拟采用的普朗特数 $Pr = 0.72$, 腔体长高比 $\Gamma = L_x/d = 12$ 。

2 水平流动进口段长度

2.1 底部加热两板之间的3种流动斑图

具有水平流动的底部加热两板之间的流动斑图依赖于表征水平流动强度的雷诺数 Re 和表征两板之间温度差大小的相对瑞利数 r 。对于给定的相对瑞利数,水平流动雷诺数 Re 的大小将决定具有水平流动进口段长度的对流斑图。图2给出了相对瑞利数 $r = 4$ 情况下,不同水平流动雷诺数 Re 时具有水平流动的底部加热两板之间的流动斑图。每个框子内为流动稳定时两板之间的流线图,水平流动雷诺数向上增大,对应的流动斑图也发生变化。可以看出,当水平流动雷诺数 $Re \leq 9.5$ 时,两板之间是基本均匀的行波对流。这时,由于水平流动雷诺数较小,两板之间热作用抑制了水平流动,控制了整个腔体,两板之间热作用和水平流动的平衡导致形成充满两板之间的行波对流。在长高比 $\Gamma = 12$ 的腔体中,存在15个滚动,其平均波数 $k = 15\pi/12 = 3.93$ 。当水平流动雷诺数超过 $Re = 9.5$ 时,两板之间出现具有水平流动进口段的局部行波对流。当水平流动雷诺数 $Re = 17.5$ 时,水平流动进口段长度 $X_0 = 1.5$,在 $1.5 \leq X \leq 12.0$ 的范围内是行波对流,行波对流的平均波数为 $k = 13\pi/10.5 = 3.89$ 。这时,水平流动强度已增大到在进口段范围抑制两板之间热作用,从而形成水平流动进口段长度;而在 $1.5 \leq X \leq 12.0$ 的区间,两板之间热作用和水平流动的平衡导致形成两板之间的行波对流。因此,两板之间是具有水平流动进口段的局部行波对流。当水平来流雷诺数进一步增到 $Re \geq 24.0$ 时,水平流动强度已增大到在整个腔体范围抑制两板之间热作用,对流滚动消失,从而形成水平流动。总之,随着参数变化,两板之间出现3种流动斑图。在水平流动雷诺数 $9.5 < Re < 24.0$ 的范围内存在水平流动进口段,水平流动进口段长度取决于水平流动雷诺数的大小。

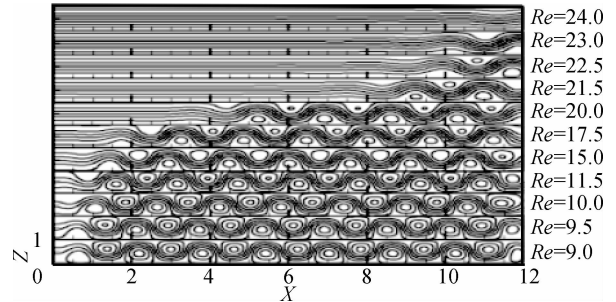


图2 $r = 4$ 情况下不同雷诺数流线
Fig. 2 Streamlines for different Reynolds numbers under condition of $r = 4$

2.2 水平流动进口段长度对雷诺数的依赖性

水平流动雷诺数影响着水平流动进口段长度。对于给定的相对瑞利数 $r = 3$ 时,雷诺数 Re 为 9.0, 10.0, 14.0, 15.0, 17.0, 19.0, 20.0 和 21.0, 两板之间的水平流动进口段长度 X_0 为 0, 0.5, 1.0, 1.5, 5.0, 10.5, 11.0 和 12.0。对以上数据进行拟合分析(图3),可得水平流动进口段长与雷诺数的相关关系式为:

$$X_0 = 0.120 Re^2 - 2.507 Re + 13.031 \quad (1)$$

式中: Re 可变范围为 $9.0 \leq Re \leq 21.0$, 可决系数 $R^2 = 0.9669$ 。

当水平流动雷诺数 $Re \leq 9.0$ 时,两板之间的水平流动进口段长度 $X_0 = 0$,系统是均匀行波对流状态。当水平流动雷诺数 $Re \geq 21.0$ 时,两板之间的水平流动进口段长度 $X_0 = 12.0$,系统是水平流动状态。在水平流动雷诺数 $9.0 < Re < 21.0$ 时,系统具有水平流动的底部加热两板之间的局部行波流动斑图,存在两板之间的水平流动进口段。两板之间的水平流动进口段长度随水平流动雷诺数的增加而增加。这是因为对于给定的相对瑞利数或者说温度差的热作用,随着水平流动雷诺数增加,水平流动抑制温度差热作用的能力加强,因此,水平流动进口段范围扩大。

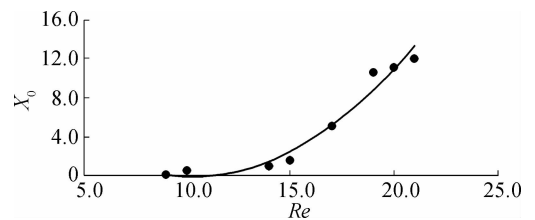


图3 进口段长度对雷诺数的依赖性
Fig. 3 Dependence of entrance section length on Reynolds number

2.3 水平流动进口段长度对相对瑞利数的依赖性

相对瑞利数是两板之间温度差热作用的反映,它影响着水平流动进口段长度。对于给定的水平流动雷诺数 $Re = 25.0$ 时,当相对瑞利数 r 为 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 和 12 时,两板之间水平流动进口段长度分别为 12.0, 8.5, 4.5, 1.5, 1.2, 1.0, 0.5 和 0。对以上数据进行相关分析(图4),可得水平流动进口段长度与相对瑞利数的变化关系式为:

$$X_0 = -0.046r^3 + 1.417r^2 - 14.667r + 51.327 \quad (2)$$

式中: r 的可变化范围为 $4 \leq r \leq 12$, 可决系数 $R^2 = 0.9875$ 。

可以看出,当相对瑞利数 $r \leq 4$ 时,两板之间水平流动进口段长度 $X_0 = 12.0$, 水平流动控制整个腔体。当相对瑞利数 $r \geq 12$ 时,两板之间水平流动进口段长度 $X_0 = 0$, 两板之间充满对流滚动的行波对流。在相对瑞利数 $4 < r < 12$ 的范围内,两板之间是局部行波流动斑图,出现两板之间的水平流动进口段。两板之间水平流动进口段长度随相对瑞利数的增加而减小。这是因为对于给定的水平流动雷诺数,随着相对瑞利数的增加两板之间温度差的热作用增强,导致对流能力增强,因此,行波对流滚动区间变大,水平流动区间减小。

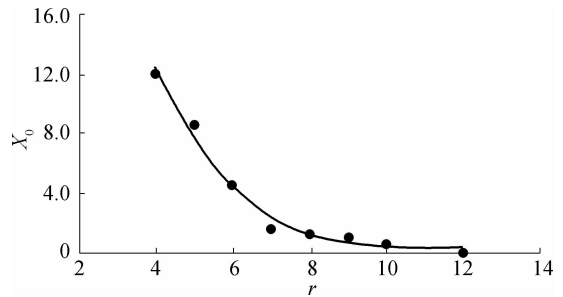


图4 进口段长度对相对瑞利数的依赖性
Fig. 4 Dependence of entrance section length on reduced Rayleigh number

3 结 语

采用二维流体力学基本方程组对普朗特数 $Pr = 0.72$ 的具有水平流动的底部加热两板之间的流动特性进行数值模拟,得出以下结论:

(1) 对于给定相对瑞利数 r , 随着雷诺数 Re 由零开始增加, 具有水平流动的底部加热两板之间依次出现定常对流滚动, 均匀行波对流滚动, 具有水平流动进口段的局部行波对流滚动及水平流动斑图等。

(2) 当相对瑞利数 $r = 3$ 时, 在雷诺数 $9.0 < Re < 21.0$ 的范围内, 系统是局部行波对流滚动, 存在水平流动进口段。随着水平流动雷诺数增加, 水平流动抑制温度差热作用的能力加强, 因此, 水平流动进口段范围扩大。

(3) 当雷诺数 $Re = 25.0$ 时, 在相对瑞利数 $4 < r < 12$ 的范围内, 两板之间是局部行波对流滚动, 出现水平流动进口段。随着相对瑞利数的增加, 两板之间温度差的热作用增强, 导致对流能力增强, 因此, 行波对流滚动区间变大, 水平流动区间减小。

参 考 文 献:

- [1] ZHAO B X, TIAN Z F. Numerical investigation of binary fluid convection with a weak negative separation ratio in finite containers [J]. *Physics of Fluids*, 2015, 27: 074102
- [2] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Traveling convections in binary fluid convection [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, 722: 240-265.
- [3] WATANABE T, HIMA M, NISHIURA Y. Spontaneous formation of travelling localized structures and their asymptotic behaviours in binary fluid convection [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, 712: 219-243.
- [4] 宁利中, 王永起, 袁喆, 等. 两种不同结构的混合流体局部行波对流斑图 [J]. *科学通报*, 2016, 61(8): 872-880. (NING Lizhong, WANG Yongqi, YUAN Zhe, et al. Two types of patterns of localized traveling wave convection in binary fluid mixtures with different structures [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2016, 61(8): 872-880. (in Chinese))
- [5] 宁利中, 王娜, 袁喆, 等. 分离比对混合流体 Rayleigh-Bénard 对流解的影响 [J]. *物理学报*, 2014, 63(10): 104401. (NING Lizhong, WANG Na, YUAN Zhe, et al. Influence of separation ratio on Rayleigh-Bénard convection solutions in a binary fluid mixture [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(10): 104401. (in Chinese))
- [6] JUNG D, LUCKE M, BUCHEL P. Influence of through-flow on linear pattern formation properties in binary mixture convection

- [J]. *Physical Review E*, 1996, 54(2): 1510-1529.
- [7] BUCHEL P, LUCKE M. Influence of through flow on binary fluid convection[J]. *Physical Review E*, 2000, 61(4): 3793-3810.
- [8] JUNG D, LUCKE M, SZPRYNGER A. Influence of inlet and bulk noise on Rayleigh-Benard convection with lateral flow[J]. *Physical Review E*, 2001, 63(5): 056301.
- [9] 胡彪, 宁利中, 宁碧波, 等. 局部行波对水平来流的依赖性[J]. *水动力学研究与进展*, 2017, 32(1): 110-116. (HU Biao, NING Lizhong, NING Bibo, et al. The dependence of localized traveling wave on horizontal flow[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2017, 32(1): 110-116. (in Chinese))
- [10] 胡彪, 宁利中, 宁碧波, 等. 周期性加热 Poiseuille-Rayleigh-Benard 流动中局部行波的研究[J]. *水动力学研究与进展*, 2017, 32(3): 336-343. (HU Biao, NING Lizhong, NING Bibo, et al. Localized traveling waves in Poiseuille-Rayleigh-Benard flows under periodic heating[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2017, 32(3): 336-343. (in Chinese))
- [11] 赵秉新, 田振夫. 底部加热平面 Poiseuille 流中的局部行波结构[J]. *水动力学研究与进展*, 2012, 27(6): 649-658. (ZHAO Bingxin, TIAN Zhenfu. Localized traveling wave convection in plan Poiseuille flow heated from below[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2012, 27(6): 649-658. (in Chinese))
- [12] 赵秉新. 水平流作用下的混合流体行波对流[J]. *水动力学研究与进展*, 2012, 27(3): 264-274. (ZHAO Bingxin. Traveling wave convection in binary fluid mixtures with lateral flow[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2012, 27(3): 264-274. (in Chinese))
- [13] NING L Z, QI X, HARADA Y, et al. A periodically localized traveling wave state of binary fluid convection with horizontal flows[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2006, 18(2): 199-205.
- [14] NING L Z, HARADA Y, YAHATA H, et al. The spatiotemporal structure of binary fluid convection with horizontal flow[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2004, 16(2): 151-157.

Analysis of entrance region of horizontal flow between two plates heated from bottom

NING Lizhong¹, ZHANG Ke¹, NING Bibo², HU Biao³, TIAN Weili⁴

(1. *State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region of China (Xi'an University of Technology)*, Xi'an 710048, China; 2. *College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University*, Jiaxing 314001, China; 3. *Jiangxi Provincial Design & Research Institute of Water Conservancy & Hydropower*, Nanchang 330029, China; 4. *Department of Architecture, Shanghai University*, Shanghai 200444, China)

Abstract: The two-dimensional basic equations of fluid mechanics are used to numerically simulate the characteristics of flow between two plates heated from below with horizontal flows, with the Prandtl number Pr equaling 0.72. The numerical simulation results show that for a given reduced Rayleigh number r , with the increase of the Reynolds number Re , there appear steady convective rolls, uniform traveling wave convective rolls, localized traveling wave convective rolls with the entrance region of the horizontal flow, and the horizontal flows occur successively between two plates heated from the bottom. When the Reynolds number Re is between 9.0 and 21.0 and the reduced Rayleigh number r equals 3, the localized traveling wave convection rolls occur in the system and there exists the entrance region of the horizontal flow. The length of the entrance region of the horizontal flow X_0 increases with the increase of the Reynolds number. When the reduced Rayleigh number r is between 4 and 12, and the Reynolds number Re equals 25.0, the localized traveling wave convection rolls occur between two plates and there exists the entrance region of the horizontal flow. The length of the entrance region of the horizontal flow decreases with the increase of the reduced Rayleigh number. And finally, the empirical formulas for the length X_0 of the entrance region varying with the Reynolds number or the reduced Rayleigh number are given in this paper.

Key words: horizontal flow; convection rolls; entrance region length; localized traveling wave