

DOI:10.16198/j.cnki.1009-640X.2018.01.007

沈良朵, 王晋宝, 邹志利, 等. 不规则波辐射应力的精确解与近似解[J]. 水利水运工程学报, 2018(1): 41-47. (SHEN Liangduo, WANG Jinbao, ZOU Zhili, et al. Exact solution and approximate solution of irregular wave radiation stress[J]. Hydro-Science and Engineering, 2018(1): 41-47. (in Chinese))

不规则波辐射应力的精确解与近似解

沈良朵^{1,2}, 王晋宝¹, 邹志利², 赵西增³

(1. 浙江海洋大学 港航与交通运输工程学院, 浙江 舟山 316022; 2. 大连理工大学 海岸与近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 3. 浙江大学 海洋学院, 浙江 杭州 310058)

摘要: 波浪辐射应力是波生沿岸流乃至近岸流的主要驱动力。波浪辐射应力的计算将直接关系到沿岸流的大小及其水动力特性。不规则波相对规则波更能反应实际海洋中的波浪运动,因此不规则波作用下辐射应力的计算将更能体现实际沿岸流中的波浪驱动力。通过推导给出不规则波辐射应力计算的精确解与近似解,并对两种计算方法进行了分析比较,在此基础上进一步用波生沿岸流试验结果对近似计算方法中的波能计算进行了验证。结果表明窄谱情况下,不规则波辐射应力的近似计算方法已有较好的精度,可节省大量的计算时间,从而提高计算效率,但精确计算方法更能准确反应各时刻各位置辐射应力的波动状况。

关键词: 辐射应力; 不规则波; 波能比较; 沿岸流

中图分类号: P731.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1009-640X(2018)01-0041-07

沿岸流作为近岸流的一种,人们很早就已经认识这一水动力现象^[1-3],从波浪辐射应力的概念出发分析沿岸流,是对沿岸流研究的重要发展。该方法认为,波浪斜向入射,从深水区传到浅水区,因水深减小引起浅水变形,使得波高增大,最终发生破碎,而波浪破碎后通过破波带时,为平衡辐射应力梯度,将沿岸波动动量转化为时均沿岸流动从而产生了波生沿岸流。刘秋兴等^[4]指出波浪辐射应力对于近岸风暴增减水起着十分重要的作用,郑金海等^[5-6]总结了波浪辐射应力理论的应用和研究进展,并给出了波浪辐射应力张量的垂向变化。对于规则波作用下辐射应力的计算,Longuet-Higgins 和 Stewart^[7]已经给出成熟的结果,对于不规则波作用下的辐射应力,李孟国等^[8]给出了综合考虑多种变形因素的近岸多向不规则波传播数学模型,唐军等^[9]考虑到入射波浪的随机性,采用 JONSWAP^[10]波浪谱对入射处单向不规则波浪要素进行离散,基于抛物型缓坡方程中的波浪势函数等参数计算波浪辐射应力^[11],并对数值模拟结果进行了验证。相对于规则波,不规则波更能反映实际波浪的运动状况,本文通过将不规则波视为一系列规则波(微幅波)的叠加给出不规则波作用下辐射应力的计算方法,包含不规则波辐射应力的精确计算方法和近似计算方法,并对两种计算方法进行了分析比较,在此基础上进一步用试验结果^[12]对不规则波辐射应力近似计算方法中的关键变量波能进行了验证。结果表明窄谱情况下,近似计算方法已有很好的精度,可节省大量的计算时间,从而提高计算效率。

1 不规则波辐射应力精确计算方法

本节通过将不规则波视为一系列规则波(微幅波)的叠加来计算不规则波的辐射应力。首先考虑单向不规则波,其波面升高可表达为:

收稿日期: 2017-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10672034); 浙江海洋大学科研启动经费资助项目

作者简介: 沈良朵(1982—),男,安徽安庆人,讲师,博士,主要从事近岸水动力方面研究。E-mail: slduo@zjou.edu.cn

通信作者: 赵西增(E-mail: xizengzhao@zju.edu.cn)

$$\eta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp(i\theta_i) \right\} \quad (1)$$

式中: $\theta_i = k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i$; A_i 为组成波的波幅, 由波浪能量谱 $S(\omega)$ 确定; Re 表示对复数取实部。

$$A_i = \sqrt{2S(\omega_i) \Delta\omega} \quad (2)$$

式中: k_i 和 ω_i 分别为组成波的波数和频率; ε_i 为随机相位(在 $0 \sim 2\pi$ 间平均分布)。式(1)是将不规则波看作一系列规则波(微幅波)的叠加。各组成波的频率和波幅由将波能谱分割成宽为 $\Delta\omega$ 的条形的中心频率和面积确定, 见图 1。这里的分割是等间距的, $\Delta\omega$ 为常数。

因为控制体两个铅垂侧面上 $\overline{\tilde{u}\tilde{w}} \neq 0$, 所以对不规则波的平均压应力要进行修正, 有

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \tilde{u}\tilde{w} dz - \overline{\rho\tilde{w}^2} = \bar{p} - \rho g(-z + \bar{\eta}) \quad (3)$$

可得 x 和 y 方向的辐射应力为

$$S_{xx} = \rho \int_{-h}^0 (\overline{\tilde{u}^2} - \overline{\tilde{w}^2}) dz + \rho g \overline{\eta^2}/2 + \rho \int_{-h}^0 \int_z^0 \partial \overline{\tilde{u}\tilde{w}} / \partial x dz dz \quad (4)$$

$$S_{yy} = \rho \int_{-h}^0 (\overline{\tilde{v}^2} - \overline{\tilde{w}^2}) dz + \rho g \overline{\eta^2}/2 + \rho \int_{-h}^0 \int_z^0 \partial \overline{\tilde{u}\tilde{w}} / \partial x dz dz \quad (5)$$

式中: \tilde{u} , \tilde{v} 和 \tilde{w} 分别为波浪水质点速度沿 x, y 和 z 三个方向的分量。

由波浪水质点的速度势函数

$$\Phi(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i g}{i\omega_i} \frac{\cosh k_i(z+h)}{\cosh k_i h} \exp(i\theta_i) \right\} \quad (6)$$

可得

$$\tilde{u}(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g A_i k_i}{\omega_i} \frac{\cosh k_i(z+h)}{\cosh k_i h} \exp(i\theta_i) \right\} \quad (7)$$

$$\tilde{w}(x, z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g A_i k_i}{i\omega_i} \frac{\sinh k_i(z+h)}{\cosh k_i h} \exp(i\theta_i) \right\} \quad (8)$$

由两复数 β_1 和 β_2 的运算公式(式中“ $*$ ”表示复数共轭)

$$\operatorname{Re} \{ \beta_1 \} \operatorname{Re} \{ \beta_2 \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \beta_1 \beta_2 \} + \frac{1}{2} \{ \beta_1 \beta_2^* \} \quad (9)$$

可得

$$\overline{\tilde{u}^2} - \overline{\tilde{w}^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ g^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_i k_i}{\omega_i} \right) \left(\frac{A_j k_j}{\omega_j} \right) \exp(i(\theta_i - \theta_j)) \frac{\cosh(k_i - k_j)(z+h)}{\cosh(k_i h) \cosh(k_j h)} \right\} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \overline{\tilde{u}\tilde{w}}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ g^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j k_j}{\omega_j} \frac{A_i k_i}{\omega_i} \exp(i(\theta_i - \theta_j)) (k_i - k_j) \frac{\sinh k_j(z+h) \cosh k_i(z+h)}{\cosh(k_j h) \cosh(k_i h)} \right\} \quad (11)$$

$$\overline{\eta^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_i A_j \exp(i(\theta_i - \theta_j)) \right\} \quad (12)$$

将式(10)和(12)代入式(4)和(5)可得

$$S_{xx} = \frac{1}{2} \rho g \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ A_i^2 \left(2n_i - \frac{1}{2} \right) + \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} A_i A_j \left(\frac{k_j \omega_i / \omega_j - k_i \omega_j / \omega_i}{k_i - k_j} + \frac{1}{2} \right) \cos(\theta_i - \theta_j) + \right.$$

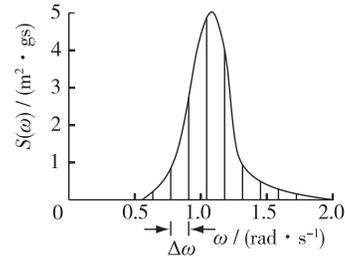


图 1 波浪能量谱及其分割

Fig. 1 Wave energy spectrum and its division

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \frac{A_i A_j}{\bar{c}_i \bar{c}_j} \cos(\theta_i - \theta_j) \left[\frac{1}{k_i + k_j} (k_j - k_i \tanh(k_i h) \tanh(k_j h)) - \frac{k_i^2 + k_j^2}{(k_i + k_j)h(k_i^2 - k_j^2)} \left(\frac{2k_i k_j}{k_i^2 + k_j^2} \tanh k_i h - \tanh k_j h \right) \right] \} \quad (13)$$

$$S_{yy} = \frac{1}{2} \rho g \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ A_i^2 \left(n_i - \frac{1}{2} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} A_i A_j \left(\frac{k_j^2 \omega_i / \omega_j - k_i^2 \omega_j / \omega_i}{k_i^2 - k_j^2} + \frac{1}{2} \right) \cos(\theta_i - \theta_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \frac{A_i A_j}{\bar{c}_i \bar{c}_j} \cos(\theta_i - \theta_j) \left[\frac{1}{k_i + k_j} (k_j - k_i \tanh(k_i h) \tanh(k_j h)) - \frac{k_i^2 + k_j^2}{(k_i + k_j)h(k_i^2 - k_j^2)} \left(\frac{2k_i k_j}{k_i^2 + k_j^2} \tanh k_i h - \tanh k_j h \right) \right] \right\} \quad (14)$$

式中:

$$\bar{c}_i = \frac{\omega_i / k_i}{\sqrt{gh}}, \bar{c}_j = \frac{\omega_j / k_j}{\sqrt{gh}}, n_i = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_i h}{\sinh 2k_i h} \right)$$

对以 α 角度入射的行进波,可应用二维张量坐标变换得到相应的辐射应力张量,此时

$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xx} & 0 \\ 0 & S_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} \quad (15)$$

2 不规则波辐射应力近似计算方法

上面精确的计算方法可单独考虑不规则波的每一个组成波,但每一个时间步都要对各组成波进行累积求和,计算量较大。这里对其进行简化近似,以达到计算速度和精度都合适的结果。该方法是针对窄波能谱情况,即波谱 $S(\omega)$ 只在峰频 ω 附近才有较大数值。这样的波谱所对应波面具有明显波群特征。

由波浪能量谱 $S(\omega)$ 确定波面 $\eta(x, t)$ 的表达式之后,可得波面时间历程的包络表达式为

$$A(x, t) = \sqrt{\eta^2 + \bar{\eta}^2} \quad (16)$$

式中: $\bar{\eta}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(k_i x - \omega_i t + \varepsilon_i)$ 。这样可由 $E_w(x, t) = \frac{1}{2} \rho g A^2(x, t)$ 得到平底地形各位置随时间变化的波能的精确值。但当地形变化时,上式中各位置的波能将不再保持该解析解的形式,此时可以将上式原点处计算得到的随时间变化的波能 $E_w(t)$ 作为波能的入射边界条件,然后通过波能守恒方程 $\partial E_w / \partial t + \partial(E_w c_g \cos \alpha) / \partial x = -S$, 假定不规则波以峰频对应的传播速度 c_g 向前传播(由于是窄波能谱),可得任一时刻任一位置的波能 $E_w(x, t)$ 的近似值。

同样可近似按规则波的结果计算各时刻各位置的辐射应力,对以 α 角度入射的行进波,有

$$S = E_w(x, t) \begin{bmatrix} n \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}(2n - 1) & \frac{n}{2} \sin 2\alpha \\ \frac{n}{2} \sin 2\alpha & n \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}(2n - 1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

由不规则波辐射应力的计算表达式可知,相对不规则波辐射应力的精确计算方法,该近似方法得到的辐射应力结果有两处近似:一处来自式(17)中各时刻各位置的波能 $E_w(x, t)$ 的计算,它是假定初始时刻的波能以峰频对应的传播速度 c_g 向前传播近似得到;另一处来自式(17)中辐射应力计算表达式中的波能传递率 $n = (1 + 2k_p h / \sinh 2k_p h) / 2$, 它是由峰频对应的波数近似计算得到。这种方法以峰频代替各组成波的频率,只有在窄波能谱的情况下才有较好的精度。该方法的优点是将不规则波近似看成规则波计算,原有的规则

波结果可直接应用,计算速度比精确的计算方法要快得多。本文试验中的不规则波采用 JONSWAP 谱生成,通过后面的分析可知,试验所生成的不规则波也为窄波能谱,用该计算方法能快速达到较好精度的结果。

3 两种计算方法的分析比较

为了分析不规则波辐射应力近似方法的计算精度和适用范围,这里采用改进的 JONSWAP 型谱^[10]来生成不规则波,其表达式如下:

$$S(f) = \beta_j H_{1/3}^2 T_p^{-4} f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}(T_p f)^{-4}\right] \gamma \exp\left[-(f/f_p - 1)^2 / (2\sigma^2)\right] \quad (18)$$

$$\beta_j = \frac{0.06238}{0.23 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma) - 1} (1.094 - 0.01915 \ln \gamma) \quad (19)$$

$$T_p = \frac{T_{H_{1/3}}}{1 - 0.132(\gamma + 0.2)^{-0.559}} \quad (20)$$

式中: f 为波浪频率; f_p 为谱峰频率; T_p 为谱峰周期; $T_{H_{1/3}}$ 为有效周期; $H_{1/3}$ 为有效波高; γ 为谱峰因子; σ 为峰型系数,当 $f \leq f_p$ 时, σ 取0.07,当 $f > f_p$ 时, σ 取0.09。

为了避免所模拟的组成波波浪频率成周期性重复,在各频率划分区间范围内随机选取频率作为该区间的代表频率。该谱式的优点在于一旦选定 γ 值,即可由设计波要素确定谱形。这里选取3个谱峰因子 γ ,其值分别为3.3,5.0和8.0来进一步分析比较,其他参数($T_{H_{1/3}}$ 取1.5s, $H_{1/3}$ 取4.49cm,水深 $h=0.045$ m,波浪入射方向与岸线法线夹角 $\alpha=30^\circ$)保持不变,由此得到不同谱峰因子 γ 对应的频谱图如图2所示,谱峰因子 γ 值越大,相应的谱分布越窄。

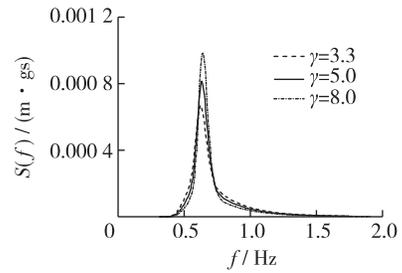


图2 不同谱峰因子 γ 对应的频谱

Fig. 2 Spectrum diagrams for different spectral peak factors

图3给出了谱峰因子 γ 取值为3.3,5.0和8.0时,经初始位置 $x=0$ m处(不规则波入射边界处)传播20s后,不规则波辐射应力 S_{xx} 沿垂直岸方向精确计算结果与近似计算结果的比较。为衡量不规则波辐射应力近似计算结果与精确计算结果的接近程度,图中也给出了采用 Wilmott^[13]提出的统计参数 d_i 来加以判断,参数 d_i 值在0~1之间,值等于1表示二者完全吻合,其值越接近于1,二者结果越接近,其计算表达式为

$$d_i = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\beta(i) - \alpha(i))^2}{\left(\sum_{i=1}^N (|\beta(i) - \bar{\alpha}| + |\alpha(i) - \bar{\alpha}|)^2\right)} \quad (21)$$

式中: $\alpha(i)$ 和 $\beta(i)$ 分别为精确计算和近似计算方法对应的结果; $\bar{\alpha}$ 表示精确计算方法所得结果的平均值。

由图3可见,随着谱峰因子 γ 值增大,谱分布变窄(图2),统计参数 d_i 值由0.7279逐渐增大到0.8399,这表明谱分布越窄,不规则波辐射应力 S_{xx} 的近似计算

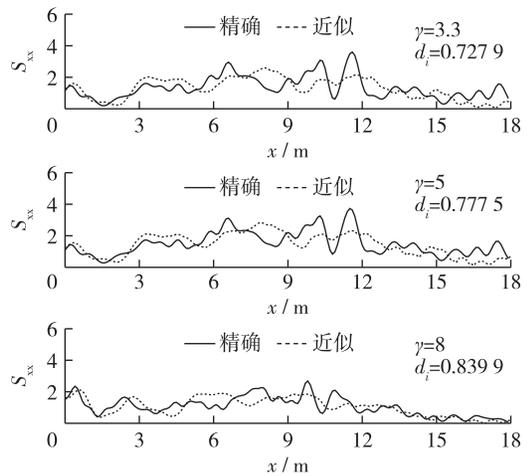


图3 不规则波辐射应力精确计算结果与近似计算结果比较

Fig. 3 Comparison between accurate and approximate calculation results of irregular wave radiation stress

方法与精确的计算方法计算结果更为接近。对于其他方向的辐射应力(S_{yy}, S_{xy})也有与其一致的规律,因篇幅所限,这里不再给出。总体而言,针对由 JONSWAP 谱(谱峰因子 $\gamma = 3.30$)产生不规则波的试验波况,不规则波辐射应力的近似计算方法与精确计算的结果也较吻合,误差较小($d_i > 0.7$)。但进一步比较会发现,不规则波波浪从入射边界($x=0$ m)开始传播至离入射边界 4 m($x=4$ m)之间,不规则波辐射应力的精确计算与近似计算较为一致,当不规则波波浪从 $x=4$ m 位置继续向前传播后,精确计算方法计算所得的辐射应力结果相对近似计算结果有更多频率更高幅值更大的波动,这些波动能更能精准地反应各时刻各位置辐射应力的实际状况,这对于进一步研究沿岸流不稳定运动有重要意义。

4 波能近似计算方法试验验证

通过由试验^[12]所测波面升高时间历程转化得到的波能来验证本文波能近似计算方法的准确性。首先给出由试验测量得到的波面升高时间历程 $\eta(t)$ 来确定所对应波能的方法。试验中沿垂直岸方向布置了浪高仪,可以用来记录各个位置的波面升高历程数据 $\eta(t)$,经 Hilbert 变换^[10]可得 $\eta^\circ(t)$,利用 $A(t) = (\eta^2(t) + \eta^{\circ 2}(t))^{1/2}$ 可得波浪的波包线,进而由 $E_w(t) = 1/2\rho g A^2(t)$ 可求得浪高仪所在位置随时间变化的波能 $E_w(t)$ 。

数值计算中,入射边界直接取离岸最远处第一个浪高仪(距离岸线 22 m)所测的波面升高时间历程数据 $\eta(t)$ 经转化后得到的随时间变化的波能 $E_w(t)$,按第 2 节中的近似处理方法,假定波群以峰频向前传播,由波能量守恒方程可计算得到任一时刻任一位置的波能 $E_w(t)$ 。

图 4 给出了不规则波况($T_p = 1.5$ s, $H_{ms} = 4.49$ cm)不同位置计算得到的波能和试验所测波面升高经 Hilbert 变换后所得的波能滤波(低通滤波截断频率为 0.1 Hz)后值的比较。图 4(a)为距离岸线 22 m 处的波能,同时也是入射边界处的波能,二者重合;图 4(b)处于平底地形段,二者吻合较好,相应的峰值频率位置基本重合,能量大小也符合较好;图 4(c)处于平面斜坡地形段,此时波浪未破碎,二者吻合仍较好,但相对于平底地形段吻合稍差,表现为相应的峰值频率位置稍有偏差,能量大小偏差也比平底地形段大;图 4(d)处于平面斜坡地形段,此时波浪已破碎,二者偏差较大,试验结果中波能的高频峰值位置和能量大小,在数值计算结果中已很难与其一一对应,但数值计算结果基本能反映试验结果中的平均波能。总体来说,数值计算结果与试验结果吻合较好,尤其是在波浪破碎以前,这表明波能近似计算方法假定波群以峰频对应的波群速度向前传播是合理的,这其中各位置计算得到的峰频时间点和试验结果存在较小的时间差可进一步通过修正波群以接近峰频对应的波群速度向岸传播来减小误差,图 4 也同时给出了修正传播频率 $f_p = 0.5$ Hz 的计算结果,由图 4 中距离岸线 10 m 处计算结果和试验结果的比较可知,波浪破碎前,修正后计算得到的峰频大小及时间点和试验结果更加接近。图 4 中也给出了波能近似计算方法及其修正后的结果相对于试验测量转换得到的波能结果接近程度的统计参数 d_i 。通过比较可发现,修正后的 d_i 的值大于修正前的结果,但波浪破碎后没有得到改善,这和前面描述的结论一致。故在以后的不规则波辐射应力计算时,可采用近似计算方法来实现快速计算,同时也能得到较好的计算精度。需要指出的是波浪破碎后,两种数值计算结果均与试验结果有较大偏差($d_i <$

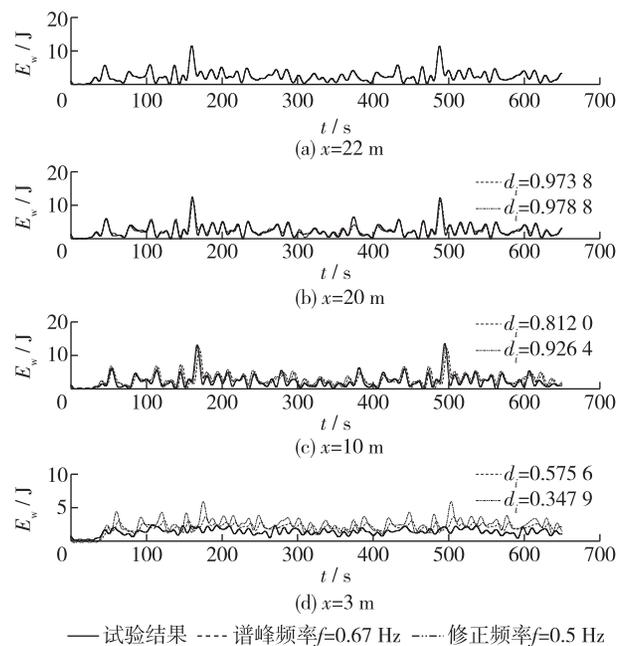


图 4 波能近似计算方法和试验所得的波能滤波后比较

Fig. 4 Comparison of wave energy after filtering between approximation calculation method and experimental result

0.6),主要是由于波浪破碎能量耗散模型很难准确地模拟波浪破碎过程所致。

5 结 语

本文给出不规则波作用下辐射应力的精确计算方法和近似计算方法,对两种计算方法进行了分析比较,并用试验结果对近似计算方法中的波能计算进行了进一步验证。结果表明:窄谱情况下,近似计算方法已拥有较好的精度,可节省大量计算时间,从而大幅提高计算效率,针对由 JONSWAP 谱(谱峰因子 γ 取 3.3 以上)产生不规则波,均可看作是窄谱情况,尤其当数值计算网格很多,计算平均沿岸流场时可直接采用不规则波辐射应力的近似计算方法。精确计算方法的计算速度远远慢于近似计算方法,但它更能精准地反应各时刻各位置辐射应力的波动状况,这能更好地解释沿岸流运动过程中某些不稳定波动现象,对于进一步研究沿岸流不稳定运动有重要意义。

参 考 文 献:

- [1] VISSER P J. Laboratory measurements of uniform longshore currents[J]. *Coastal Engineering*, 1991, 15(5): 563-593.
- [2] WANG Yan, ZOU Zhili. An experimental and numerical study of bimodal velocity profile of longshore currents over mild-slope barred beaches[J]. *Ocean Engineering*, 2015, 106: 415-423.
- [3] 陈志春. 波浪耦合作用下近岸流现象研究[D]. 天津: 天津大学, 2005. (CHENG Zhichun. Research on nearshore currents with wave-current interaction[D]. Tianjin: Tianjin University, 2005. (in Chinese))
- [4] 刘秋兴, 于福江, 王培涛, 等. 辐射应力对台风风暴潮预报的影响和数值研究[J]. *海洋学报*, 2011, 33(5): 47-53. (LIU Qiuxing, YU Fujiang, WANG Peitao, et al. Numerical study on storm surge forecasting considering wave-induced radiation stress [J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2011, 33(5): 47-53. (in Chinese))
- [5] 郑金海, 严以新. 波浪辐射应力理论的应用和研究进展[J]. *水利水电科技进展*, 1999, 19(6): 6-8. (ZHENG Jinhai, YAN Yixin. Research and application of wave-induced radiation stress theory[J]. *Advances in Science and Technology of Water Resources*, 1999, 19(6): 6-8. (in Chinese))
- [6] 郑金海, 严以新. 波浪辐射应力张量的垂向变化[J]. *水动力学研究与进展*, 2001, 16(2): 246-253. (ZHENG Jinhai, YAN Yixin. Vertical variations of wave-induced radiation stresses tensor[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2001, 16(2): 246-253. (in Chinese))
- [7] LONGUET-HIGGINS M S, STEWART R W. Radiation stresses in water waves; a physical discussion with applications[J]. *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 1964, 11(4): 529-562.
- [8] 李孟国, 时钟, 李文丹. 综合考虑多种变形因素的近岸多向不规则波传播数学模型—I.模型的建立[J]. *水动力学研究与进展*, 2006, 21(4): 444-450. (LI Mengguo, SHI Zhong, LI Wendan. A mathematical model for irregular multi-directional wave propagation incorporating multi-factors of transformation in the coastal waters—I. setup of the model [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2006, 21(4): 444-450. (in Chinese))
- [9] 唐军, 沈永明, 崔雷, 等. 随机波浪作用下近岸波流场的数值模拟[J]. *力学学报*, 2008, 40(4): 454-463. (TANG Jun, SHEN Yongming, CUI Lei, et al. Numerical simulation of random wave-induced near-short currents [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 40(4): 454-463. (in Chinese))
- [10] 俞聿修. 随机波浪及其工程应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003. (YU Yuxiu. Random wave and its engineering application[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [11] 郑永红, 沈永明, 邱大洪. 结合抛物型缓坡方程计算波浪辐射应力[J]. *海洋学报*, 2000, 22(6): 110-116. (ZHENG Yonghong, SHEN Yongming, QIU Dahong. Calculation of wave radiation stresses connected with the parabolic mild-slope equation[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2000, 22(6): 110-116. (in Chinese))
- [12] 沈良朵, 邹志利, 唐志波, 等. 缓坡海岸平均沿岸流实验研究与数值模拟[J]. *船舶力学*, 2016, 20(8): 973-982. (SHEN Liangduo, ZOU Zhili, TANG Zhibo, et al. Experimental study and numerical simulation of mean longshore current for mild slope[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2016, 20(8): 973-982. (in Chinese))
- [13] WILMOTT C J. On the validation of models[J]. *Physical Geography*, 1981, 2(2): 184-194.

Exact solution and approximate solution of irregular wave radiation stress

SHEN Liangduo^{1,2}, WANG Jinbao¹, ZOU Zhili², ZHAO Xizeng³

(1. *School of Port and Transportation Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316022, China*; 2. *State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*; 3. *Ocean Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China*)

Abstract: The wave radiation stress is the main driving force of wave induced longshore current and even nearshore current. It is directly related to the size and hydrodynamic characteristics of longshore current whether the calculation of the wave radiation stress is accurate or not. Irregular waves are more capable of reacting wave motion in the ocean compared to regular waves. Therefore, the calculation of the radiation stress under irregular waves will be more able to reflect the wave driving force in the actual longshore current. The exact solution and approximate solution of the irregular wave radiation stress are derived and compared with the two kinds of calculation methods. On the basis of this, the experimental results of wave-driven longshore currents are used to verify the calculation of wave energy in the approximate calculation method. The results show that: the approximate calculation method of irregular wave radiation stress has a good accuracy under the condition of narrow spectrum, which can save a lot of computing time and thus improve the efficiency of calculation. However, the exact calculation method can accurately reflect the fluctuation of radiation stress at each moment and each location.

Key words: radiation stress; irregular wave; wave energy comparison; longshore current