DOI:10.16198/j.cnki.1009-640X.2016.03.007

白闰平, 李国英, 米占宽. 等应变条件下碎石桩复合地基的固结解析解[J]. 水利水运工程学报, 2016(3): 53-60. (BAI Runping, LI Guo-ying, MI Zhan-kuan. Analytical solution of consolidation for gravel pile composite foundation under equal strain conditions[J]. Hydro-Science and Engineering, 2016(3): 53-60.)

# 等应变条件下碎石桩复合地基的固结解析解

# 白闰平1,2,李国英2,米占宽2

(1. 同济大学 地下建筑与工程系,上海 200092;2. 南京水利科学研究院 水利部土石坝破坏机理与防控技术 重点实验室,江苏 南京 210029)

**摘要**:根据现有几种较为经典散粒体桩复合地基的固结解析理论,推导了碎石桩复合地基在等应变条件下,考虑井阻和涂抹效应的固结解析解。推导过程中,保证了孔压一阶和二阶微分方程,在各区域分界面的连续性,对比分析了本文解析解与现有几种较为经典解析解的异同点,最后通过对比本文解、Barron 解、Hansbo 解、谢康和解的各计算值以及数值模拟结果,验证了本文解的正确性。

# **关 键 词:** 解析解; 固结; 碎石桩复合地基; 等应变条件 **中图分类号:** TU47 **文献标志码:** A **文章编号:**1009-640X(2016)03-0053-08

碎石桩是一种散体材料桩,通常应用于软弱地基的加固工程中。复合地基中水的渗流方向,总是倾向于 水力坡降较大的方向,碎石桩的渗透系数远大于桩间土的渗透系数,因此桩间土到碎石桩桩心的径向是水力 坡降最大的方向和主要的渗流方向。碎石桩良好的排水特性可将流入桩体的水排出地基;而碎石桩复合地 基在上覆荷载作用下不断发生排水固结,整个地基发生沉降。

复合地基中的渗流和变形都是三维的,岩土工程研究中,完全考虑地基变形、荷载和渗流状况非常复杂。 为了得到简单实用的复合地基解析解,研究人员将真实荷载视为分布面积很大的均布荷载,这样可认为复合 地基中每根桩的变形相同,只有竖向的变形,每根桩以及桩周土的渗流为空间轴对称渗流,这样处理已在其 散粒体材料桩的固结分析中证明可行<sup>[1-5]</sup>。

在进行散粒体材料桩复合地基固结分析时,为了计算简便和方便应用,认为在均布荷载作用下,复合地 基中同一深度处的竖向变形相等,称之为等应变<sup>[3,6-8]</sup>。R. A. Barron 在研究砂井地基固结解析理论时提出 了井阻效应和涂抹效应。碎石桩和其他散粒体桩类似,也存在井阻效应和施工造成的涂抹效应,在碎石桩复 合地基的固结计算中,是否考虑二者的作用,必然对计算结果造成一定影响。

目前散粒体桩复合地基等应变条件下固结解析理论有 Barron 和 Hansbo 提出的等应变条件下的砂井地 基固结解析理论<sup>[1-2]</sup>,以及谢康和等<sup>[3]</sup>提出的等应变条件下砂井地基的固结解析理论,自由应变条件下的固 结解析理论有 Yoshikuni 理论<sup>[4]</sup>。相比等应变条件下的固结解,自由应变条件下的固结解更接近真实地基的 变形状况,且二者计算的结果也比较接近<sup>[3]</sup>。

本文在以上3种等应变固结理论基础上,考虑了桩周土涂抹区和非扰动区边界孔压变化率连续的状况, 提出了碎石桩复合地基等应变条件下的固结解析解,以作为上述3种经典理论的完善和补充。

- 收稿日期:2015-06-18
- 基金项目:国家自然科学基金重大研究计划集成项目(91215301);中央级公益性科研院所基本科研业务费专项资金项目 (Y312011,Y313012,Y314010)
- 作者简介:白闰平(1982—),男,内蒙古乌兰察布人,博士研究生,主要从事岩土工程数值模拟与地基处理方面的研究。 E-mail:bairunp@163.com

### 1.1 假定条件与固结计算示意图

碎石桩复合地基的固结计算单元如图 1 所示。图中:r轴为固结计算所取柱坐标系的径向轴;z轴为固结计 算所取柱坐标系的竖向轴;H为碎石桩复合地基固结计 算的深度; $k_h$ 和 $k_v$ 为地基土水平向和竖直向渗透系数; $k_a$ 为涂抹区水平向渗透系数; $k_p$ 为碎石桩竖直向渗透系数;  $r_e$ ,  $d_e$ 为影响区半径和直径; $r_d$ ,  $d_d$ 为涂抹区半径和直径;  $r_p$ ,  $d_p$ 为碎石桩半径和直径; $p_0$ 为复合地基表面作用的均 布荷载。

本文碎石桩复合地基固结计算的主要假定条件如下:①碎石桩与桩周土的变形遵循等应变假设,碎石桩复合地基内只有竖向变形,地基同一深度所处平面上应变相等;②因为碎石桩渗透系数较大,本文只考虑桩周土的径向渗流,不考虑桩周土的竖向渗流,认为土体竖向渗透系数 k,等于零;③碎石桩内径向孔压的变化忽略不计,只考虑竖向渗流且桩周土排出的水量等于碎石桩内渗流的水量;④碎石桩和桩周土除渗透系数不同外,其他性质均相同;⑤地基中水的渗流满足达西定律。



图 1 碎石桩复合地基固结计算单元示意

Fig. 1 Sketch of gravel pile composite foundation for calculation process of consolidation

#### 1.2 径向固结基本方程与定解条件

根据本文的假定条件给出只考虑径向渗流的轴对称 固结方程,考虑到桩周土的涂抹区和未扰动区渗透系数不同,分区间列方程如下:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{v}}{\partial t} = -\frac{k_{d}}{\gamma_{w}} \left( \frac{\partial^{2} u_{r}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r}}{\partial r} \right) \qquad r_{p} \leq r \leq r_{d}$$
(1a)

$$\frac{\partial \varepsilon_{v}}{\partial t} = -\frac{k_{h}}{\gamma_{w}} \left( \frac{\partial^{2} u_{r}}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r}}{\partial r} \right) \qquad r_{d} < r \leq r_{e}$$
(1b)

式中: $u_r$ 为仅考虑径向渗流的桩周土内任一点孔压,为z,r,t的函数; $\varepsilon_r$ 为竖向应变,为z,t的函数。

复合地基只有竖向应变,则固结计算单元的体应变即为竖向应变,地基的体应变为:

$$\varepsilon_{v} = \varepsilon_{z} = \frac{1}{E_{s}}(\bar{\sigma}_{z} - \bar{u}_{r})$$
<sup>(2)</sup>

将式(2)对时间 t 求偏导,得:

$$\frac{\partial \varepsilon_{v}}{\partial t} = -\frac{1}{E_{s}} \frac{\partial \bar{u}_{r}}{\partial t}$$
(3)

式中: $\sigma_x$ 为地基内某深度的平均总应力,不随时间变化,对t的偏导数为零; $\bar{u}_x$ 为仅考虑径向渗流条件下的 桩周土平均孔压,为z,t的函数; $E_x$ 为地基压缩模量。

取高度为 dz 的微圆柱,中心为碎石桩,边缘为桩周土,微元体中桩周土排出的水量,等于碎石桩向上渗流的水量:

$$\frac{\partial^2 u_{\rm p}}{\partial z^2} = -\frac{2k_{\rm d}}{r_{\rm p}k_{\rm p}} \frac{\partial u_{\rm r}}{\partial r} \bigg|_{r=r_{\rm p}}$$
(4)

式中:u<sub>p</sub>为碎石桩内任意深度的孔压,为z,t的函数。

方程(1),(3)和(4)等应变条件下碎石桩复合地基的径向固结基本方程,求解方程的定解条件如下: (1)碎石桩影响区外侧边界和计算单元底部,假定为不透水边界:

$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0 \qquad (5); \quad \left. \frac{\partial u_p}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \qquad (6)$$

(2)计算单元的顶部为透水面:
$$u_p|_{z=0} = 0$$

(3) 地基初始平均孔压等于外加荷载:  $\bar{u}_r |_{t=0} = u_0 = p_0$  (8)

(4)碎石桩和扰动区公共边界的孔压连续: $u_r |_{r=r_0} = u_p$  (9)

#### 1.3 径向固结基本方程的求解

对(1a),(1b)两式的r积分,并代入边界条件式(6),首先确定式(1b)中的积分常数,然后通过方程分段 点的连续性得式(1a)中的积分常数,有:

$$\frac{\partial u_{\rm r}}{\partial r} = \frac{\gamma_{\rm w}}{2k_{\rm d}} \frac{\partial \varepsilon_{\rm v}}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{k_{\rm d}}{k_{\rm h}} (r_{\rm e}^2 - r_{\rm d}^2) + r_{\rm d}^2 \right] - r \right\} \qquad r_{\rm p} \le r \le r_{\rm d}$$
(10a)

$$\frac{\partial u_{\rm r}}{\partial r} = \frac{\gamma_{\rm w}}{2k_{\rm h}} \frac{\partial \varepsilon_{\rm v}}{\partial t} \left( \frac{r_{\rm e}^2}{r} - r \right) \quad r_{\rm d} < r \le r_{\rm e}$$
(10b)

对方程(10a)和(10b)两式的r积分,并代入边界条件式(9),有:

$$u_{\rm r} = \frac{\gamma_{\rm w}}{2k_{\rm d}} \frac{\partial \varepsilon_{\rm v}}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{k_{\rm d}}{k_{\rm h}} (r_{\rm e}^2 - r_{\rm d}^2) + r_{\rm d}^2 \right] \ln \frac{r}{r_{\rm p}} - \frac{r^2 - r_{\rm p}^2}{2} \right\} + u_{\rm p} \quad r_{\rm p} \le r \le r_{\rm d}$$
(11a)

$$u_{\rm r} = \frac{\gamma_{\rm w}}{2k_{\rm d}} \frac{\partial \varepsilon_{\rm v}}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{k_{\rm d}}{k_{\rm h}} (r_{\rm e}^2 - r_{\rm d}^2) + r_{\rm d}^2 \right] \ln \frac{r_{\rm d}}{r_{\rm p}} - \frac{r_{\rm d}^2 - r_{\rm p}^2}{2} \right\} + \frac{\gamma_{\rm w}}{2k_{\rm h}} \frac{\partial \varepsilon_{\rm v}}{\partial t} \left[ r_{\rm e}^2 \ln \frac{r}{r_{\rm d}} - \frac{r^2 - r_{\rm d}^2}{2} \right] + u_{\rm p} \quad r_{\rm d} < r \le r_{\rm e} \ (11b)$$

碎石桩复合地基中任意深度的平均孔压为<sup>[2]</sup>: 
$$\bar{u}_r = \frac{1}{\pi (r_e^2 - r_p^2)} \left( \int_{r_p}^{r_d} 2\pi r u_r dr + \int_{r_d}^{r_e} 2\pi r u_r dr \right)$$
 (12)

将式(11a)和(11b)代入方程(12),得:
$$\bar{u}_r = \frac{\gamma_v r_e^2}{2k_h} F(l,m) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + u_p$$
 (13)

式中的 F(l, m) 通过下式计算:

$$F(l,m) = \left(\frac{1}{l^2 - 1}\right) \left[ \left(l^2 - m^2\right) + \frac{k_{\rm h}}{k_{\rm d}}m^2 \right] \left(\ln m - \frac{m^2 - 1}{2l^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{k_{\rm h}}{k_{\rm d}}\frac{m^2 - 1}{l^2 - 1} \left(1 - \frac{m^2 + 1}{2l^2}\right) + \frac{l^2}{l^2 - 1}\ln \frac{l}{m} - \frac{\left(l^2 - m^2\right)\left(3l^2 - m^2\right)}{4l^2\left(l^2 - 1\right)} \right]$$
(14)

式中: 
$$l = \frac{r_{e}}{r_{p}}; m = \frac{r_{d}}{r_{p}}, m = \frac{r_{d}}{r_{p}}, m = \frac{r_{e}}{r_{p}}, m = \frac{r_{e}}{r_{p}}, m = \frac{\gamma_{w}}{2k_{d}}, \frac{\partial \varepsilon_{v}}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{k_{d}}{k_{h}} (r_{e}^{2} - r_{d}^{2}) + r_{d}^{2} \right] \frac{1}{r_{p}} - r_{p} \right\}$$
  
将式(15)代人式(4),得:
$$(15)$$

$$\frac{\partial^2 u_{\rm p}}{\partial z^2} = -\frac{\gamma_{\rm w}}{k_{\rm p}} \left[ \frac{k_{\rm d}}{k_{\rm h}} (l^2 - m^2) + m^2 - 1 \right] \frac{\partial \varepsilon_{\rm v}}{\partial t}$$

由式(13)和式(3),可推出如下方程:

$$\frac{\partial \bar{u}_{\rm r}}{\partial t} = -\psi(\bar{u}_{\rm r} - u_{\rm p}) \tag{17}$$

式中: $\psi = \frac{8k_{\rm h}E_{\rm s}}{\gamma_{\rm w}d_{\rm e}^2F(l,m)}$ 。

(7)

(16)

由式(13)和(16),可推出如下方程:

$$\frac{\partial^2 u_{\rm p}}{\partial z^2} = -\mu^2 (\bar{u}_{\rm r} - u_{\rm p}) \tag{18}$$

式中: $\mu^2 = 8[k_d(l^2 - m^2) + k_h(m^2 - 1)] / [k_p d_e^2 F(l,m)]_{\circ}$ 

由式(17)和(18),可推出如下微分方程: 
$$\frac{\partial u_p}{\partial z^2 \partial t} + \psi \frac{\partial u_p}{\partial z^2} - \mu^2 \frac{\partial u_p}{\partial t} = 0$$
 (19)

令: 
$$u_{p} = G(z)H(t)$$
,得如下方程:  $\frac{G(z)}{G(z)} = \frac{\mu^{2}H(t)}{\dot{H}(t) + \psi H(t)} = -B^{2}$  (20)

式中:G(z)和H(t)分别为z和t的函数;B为任意常数。

方程(20)两边,只有同为常数,才能保证两边相等,即:

$$G(z) + B^2 G(z) = 0$$
 (21a)

$$(\mu^{2} + B^{2}) H(t) + B^{2} \psi H(t) = 0$$
(21b)

通过求解方程(21a)和(21b)得:

$$u_{\rm p} = (C_1 \cos(Bz) + C_2 \sin(Bz)) \exp(-\beta_{\rm r} t)$$
(22)

式中: $C_1$ , $C_2$ 为任意常数; $\beta_r = \frac{B^2 \psi}{\mu^2 + B^2}$ 。

由求解条件式(7),得:*C*<sub>1</sub>=0。 由求解条件式(6),得:

$$C_2 B\cos(BH) = 0 \tag{23}$$

u<sub>p</sub>取非零解的条件为:

$$B = \frac{N}{H}, \ N = \frac{(2n+1)\pi}{2}; \ n = 0, 1, 2, \cdots$$
(24)

方程(22)的特解为:

$$u_{p}^{*} = C_{2} \sin\left(\frac{N}{H}z\right) \exp(-\beta_{r}t); \ n = 0, 1, 2, \cdots$$
 (25)

式中: $\beta_r = \frac{N^2 \psi}{H^2 \mu^2 + N^2}$ 。 方程(22)的通解为:

 $u_{\rm p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_2 \sin\left(\frac{N}{H^2}\right) \exp(-\beta_r t)$ (26)

将方程(26)代入方程(18),得:

$$\bar{u}_{\rm r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi}{\psi - \beta_{\rm r}} C_2 \sin\left(\frac{N}{H^2}\right) \exp(-\beta_{\rm r}t)$$
(27)

由定解条件式(8)得:

$$\bar{u}_{r}|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi}{\psi - \beta_{r}} C_{2} \sin\left(\frac{N}{H}z\right) = u_{0}$$
(28)

式(28)为傅里叶级数,依据傅里叶级数的系数与函数的关系得:

$$C_2 = \frac{2}{N} \frac{\psi - \beta_r}{\psi} u_0 \tag{29}$$

将式(29)代入式(26),有:

$$u_{\rm p} = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{N} \frac{\psi - \beta_{\rm r}}{\psi} \sin\left(\frac{N}{H}z\right) \exp(-\beta_{\rm r}t) \right]$$
(30)

将式(29)代入式(27)得:

$$\bar{u}_{r} = u_{0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{N} \sin\left(\frac{N}{H^{2}}\right) \exp(-\beta_{r}t)$$
(31)

由式(3),(11),(17),(30)和(31),推出 r<sub>p</sub>≤r≤r<sub>d</sub>范围内最终孔压表达式为:

$$u_{r} = u_{0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{N} \sin(\frac{N}{H}z) \exp(-\beta_{r}t) \times \left( \frac{\psi - \beta_{r}}{\psi} + \left\{ \left[ \left(1 - \frac{m^{2}}{l^{2}}\right) \frac{k_{d}}{k_{h}} + \frac{m^{2}}{l^{2}} \right] \ln m - \frac{m^{2} - 1}{2l^{2}} \right\} \frac{\beta_{r}k_{h}}{k_{d}\psi F(l,m)} + \frac{\beta_{r}}{\psi F(l,m)} \left[ \ln \frac{r}{r_{d}} - \frac{r^{2} - r_{d}^{2}}{2r_{e}^{2}} \right] \right)$$
(33)

碎石桩复合地基某一深度的径向固结度 U,为:

$$U_{r} = 1 - \frac{\bar{u}_{r}}{u_{0}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{N} \sin\left(\frac{N}{H}z\right) \exp(-\beta_{r}t) \right]$$
(34)

整个地基的平均固结度 $\overline{U}$ ,为:

$$\overline{U}_{r} = 1 - \frac{1}{u_{0}} \left( \frac{1}{H} \int_{0}^{H} \bar{u}_{r} dz \right) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{N^{2}} \exp(-\beta_{r} t)$$
(35)

# 2 对比验证

#### 2.1 有限元模拟

采用有限元方法模拟两个桩径下碎石桩复合地基的固结,验证本文解的正确性。为方便计算地基压缩 模量,土体和桩体均取为线弹性体。为获得较好的计算精度和方便有限元网格划分,将碎石桩、涂抹区以及 未扰动区,通过面积等效方法转化为正方形区域。因为桩间土只考虑水平向渗流,碎石桩只考虑竖向渗流, 水通过桩间土径向渗流进入碎石桩,再通过碎石桩竖向渗流排出,因此在面积等效时,未扰动区和涂抹区采 用圆柱侧面积等效,碎石桩采用圆柱截面积等效。取两个桩径(0.5和0.8m)的算例进行模拟,参数见表1。

因为桩径0.5和0.8m的有限元模拟方法均类似,为节省篇幅,图2~5仅给出桩径0.8m的有限元计算 相关输出图。图3为复合地基中孔隙水渗流速度矢量,很好地反应了碎石桩复合地基固结过程中孔隙水主 要通过碎石桩向上排出。图4和5给出了固结36.5d后的超孔压和位移的分布云图。图4中地基的超孔 压达到10<sup>-15</sup>的数量级,几乎可以认为超孔压完全消散。图5中可看出地基表面沉降约为10 cm。将地基任 一时刻的表面沉降除以最终沉降(地基在固结36.5d的表面沉降值),可求出地基的平均固结度。将该平均 固结度与本文计算的平均固结度进行对比,以验证本文解。

Tab. 1 FEM parameters of pile diameters 0.5 m and 0.8 m					
	弹性模量/MPa	泊松比	渗透系数/(m⋅s <sup>-1</sup> )		
				桩径 0.5 m	桩径 0.8 m
碎石桩	10	0.3	$k_z = 1 \times 10^{-4}$	$L_{\rm p} = 0.443$	$L_{\rm p} = 0.709$
涂抹区	10	0.3	$k_x = k_y = 2 \times 10^{-8}$	$L_{\rm d} = 1.178$	$L_{\rm d} = 1.178$
影响区	10	0.3	$k_x = k_y = 1 \times 10^{-7}$	$L_{\rm e} = 1.963$	$L_{\rm e} = 3.142$

表 1 桩径 0.5 和 0.8 m 模型的有限元计算参数



图 2 网格剖分(桩径 0.8 m) Fig. 2 FEM meshs (pile diameter 0.8 m)



图 3 固结过程中孔隙水渗流速度矢量(桩径 0.8 m) Fig. 3 Seepage velocity vector of pore water during consolidation (pile diameter 0.8 m)



图 4 固结完成后的超孔压云图(桩径 0.8 m) Fig. 4 Contour of excessive pore water pressure after consolidation (pile diameter 0.8 m)



图 5 固结完成后的位移云图(桩径 0.8 m) Fig. 5 Contour of displacement after consolidation (pile diameter 0.8 m)

#### 2.2 与有限元及其理论的对比分析

本文解与谢康和解<sup>[3]</sup>只有在不考虑涂抹效应时是一致的。谢康和解中,由孔压的二阶微分方程求解一 阶微分方程时,确定积分常数的方法,使涂抹区外侧边界孔压的一阶微分方程不连续,使最后得出的孔压值 偏大,反应在固结度随时间因素变化的曲线上,是慢于同类理论的。而本文在推导过程中,孔压各阶微分方 程的表达式在各区间分段点处的计算值均连续,这与谢康和解的边界处理方式不同。

Barron 解<sup>[1]</sup>、Hansbo 解<sup>[2,5]</sup>与本文解在不考虑井阻和涂抹效应的情况下是一致的。二者解中固结度的 求解表达式均含有积分式,且积分较为困难,需用数值积分计算。Hansbo 解在计算地基某一深度土层的固 结度时,相比 Barron 解而言,表达式比较简洁,参数求解也比较简便,但是 Hansbo 解只给出了某深度土层的 固结度计算式,没有给出整个地基平均固结度的计算式,需要进一步在整个地基中积分求解,所以计算也相 对繁琐一些。

用 Barron 理论、Hansbo 理论、谢康和固结解以及本文固结解,分别计算复合地基的平均固结度。将各平均固结度计算值与径向固结时间因素的变化曲线,绘制成曲线图,如图 6 所示。

从图 6 中可看出:本文解计算的固结度随时间的变化趋势,与现有较为经典的固结理论和有限元计算结果的变化趋势一致;本文解与 Barron 理论计算的固结度和有限元计算结果较为接近,与有限元计算的结果 比其他 3 种理论更为接近。而谢康和理论得出的地基固结速率不仅慢于本文理论的计算值,而且也慢于 Barron 和 Hansbo 理论的计算值,这主要是因为谢康和理论推导得出的孔压计算式,大于本文理论和其他理论的孔压计算式,进而其计算的地基固结速率偏慢。



图 6 各理论计算的平均固结度对比

Fig. 6 Comparison of average degrees of consolidation calculated by different theories

## 3 结 语

碎石桩复合地基在固结排水机理方面,与砂井、砂桩等散粒体材料桩基本相同,区别主要在于各桩体材料的排水能力(渗透系数)不同。现有散粒体桩的固结解析解,基本都是基于几种较为经典的砂井固结理论 提出的。本文基于谢康和等应变固结理论,推导了碎石桩复合地基的等应变固结理论的解析解,通过与现有 经典固结理论和有限元计算结果对比,分析了本文解析解与现有较为经典的固结理论的异同点。本文推导 的碎石桩复合地基等应变固结解析理论,可作为现有散粒体材料桩固结理论的重要补充和完善。

## 参考文 献:

- [1] BARRON R A. Consolidation of fine grained soils by drain wells[J]. Transaction ASCE, 1948, 113: 718-742.
- [2] HANSBO S. Consolidation of fine grained soils by prefabricated drains [C] // Proceedings of the 10<sup>th</sup> European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Stockholm, Sweden, 1981: 677-682.
- [3] 谢康和,曾国熙. 等应变条件下的砂井地基固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 1989, 11(2): 3-17. (XIE Kang-he, ZENG Guo-xi. Consolidation theories for drain wells under equal strain condition [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1989, 11(2): 3-17. (in Chinese))
- [4] YOSHIKUNI H, NAKANODO H. Consolidation of soils by vertical drain wells with finite permeability [J]. Soils and Foundations, 1974, 14(2): 35-46.
- [5] HANSBO S, JAMIOLKOWSKI M, KOK L. Consolidation by vertical drains[J]. Géotechnique, 1981, 31(1): 45-66.
- [6] 邢皓枫, 龚晓南, 杨晓军. 碎石桩加固双层地基固结简化分析[J]. 岩土力学, 2006, 27(10): 1739-1753. (XING Haofeng, GONG Xiao-nan, YANG Xiao-jun. Simplified analysis of consolidation of double-layered ground reinforced by gravel-piles [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(10): 1739-1753. (in Chinese))
- [7] 卢萌盟,谢康和,王玉林,等.碎石桩复合地基非线性固结解析解[J]. 岩土力学, 2010, 31(6): 1833-1840. (LU Mengmeng, XIE Kang-he, WANG Yu-lin, et al. Analytical solution for nonlinear consolidation of stone column reinforced composite ground[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(6): 1833-1840. (in Chinese))
- [8] 王双, 王睿, 杨彪,等. 变荷载作用下碎石桩复合地基固结简化分析[J]. 岩土力学, 2015, 36(1): 34-40. (WANG Shuang, WANG Rui, YANG Biao, et al. Simplified analysis for consolidation of stone columns reinforced foundation under general time-dependent loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(1): 34-40. (in Chinese))

# Analytical solution of consolidation for gravel pile composite foundation under equal strain conditions

BAI Run-ping<sup>1, 2</sup>, LI Guo-ying<sup>2</sup>, MI Zhan-kuan<sup>2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Nanjing Hydraulic Research Institute, Key Laboratory of Earth-Rock Dam Failure Mechanism and Safety Control Technics of Ministry of Water Resources, Nanjing 210029, China)

**Abstract**: According to the existing classical theories of consolidation for granular material composite foundation, an analytical theory of consolidation for gravel pile composite foundation is derived considering that the vertical strains of the composite foundation are equal at the same depth, and well resistance and smear effect are taken into account in the derivation of the analytical solutions in this paper. A continuity of the first and the second order differential equations for pore pressure is ensured in the shared boundary of different regions in the derivation. By comparing the theory of consolidation derived in this paper and the existing classical theories of consolidation, analyses of some differences between each theory have been made. Finally, the theory of consolidation derived in this paper has proved that the analytical solution derived in the study is correct by comparing the solution given in the paper, the solutions of existing classical theories of consolidation and FEM analysis results.

Key words: analytical solution; consolidation; gravel pile composite foundation; vertical equal strain condition