

DOI: 10.16198/j.cnki.1009-640X.2016.01.005

任杰, 苏怀智, 杨孟, 等. 边坡位移预警指标的实时估计与诊断[J]. 水利水运工程学报, 2016(1): 30-36. (REN Jie, SU Huai-zhi, YANG Meng, et al. Real-time estimation and diagnosis of early warning indicator of slope displacement based on POT-catastrophe theory[J]. Hydro-Science and Engineering, 2016(1): 30-36.)

边坡位移预警指标的实时估计与诊断

任 杰^{1,2}, 苏怀智^{1,2}, 杨 孟^{1,2}, 周志杰²

(1. 河海大学 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 边坡预警指标的实时估计与诊断是实现边坡安全监控、预防边坡演变为滑坡的重要手段。安全预警注重考虑极端事件,其关键在于能否准确进行效应量序列分位数分析及刻画其尾部特征。基于极值理论中超阈值(Peaks over Threshold, POT)模型,分时段考虑边坡位移监测序列,借助 Hill 图法拟定合理的阈值,再利用广义帕累托分布(Generalized Pareto Distribution, GPD)对超阈值序列进行拟合分析,渐进地刻画位移序列分布的尾部特征,分析其抵御已经历荷载的能力。假定边坡失事概率,得到位移预警指标实时估计序列,挖掘或评估出该边坡面临可能发生极端荷载时的抵御能力。最后基于突变理论中尖点突变模型对位移预警指标实时估计序列进行突变诊断,结合具体边坡工程实例,验证了 POT-突变理论混合模型的合理性。

关 键 词: 边坡; 位移预警指标; 极值理论; POT 模型; 尖点突变理论

中图分类号: TV698.1

文献标志码: A

文章编号: 1009-640X(2016)01-0030-07

根据边坡工程性态及原始监测资料,借助先进的数学、力学工具建立各种效应量的预警指标估计模型,是实现边坡工程安全预警的重要手段。边坡工程安全预警的主要目的在于通过实时监测并分析边坡变形及发展态势,以便能及时采取工程或非工程措施,达到防止或减少边坡破坏所带来的灾害损失。对边坡效应量预警指标的估计是实现边坡安全预警的前提^[1]。预警机理在于对抵御已经历荷载能力的分析,评估和预测抵御可能发生荷载的能力。预警指标估计重点考虑极端事件,借助极值理论可实现对其的估计和研究^[2]。

本文基于极值理论中 POT 模型进行建模。其流程通常是依据一定的规则拟定合理的阈值,以超阈值序列作为子样本序列,利用 GPD 分布拟合子样本序列,得到其分布函数,根据统计学条件概率公式继而得到母样本的分布函数,结合边坡失事概率完成对预警指标的估计。A. A. Balkema 以及 J. Pickands 等指出,来自同一总体的简单随机样本,若阈值拟定充分大,超阈值的随机变量的极限分布即为 GPD 分布^[3-4]。大量学者研究表明,基于 POT 模型的极值理论方法在扩大样本容量,提高样本质量的同时比其他方法能够更准确地描述序列分布的尾部特征,尤其在采样数据较少的情况下,是一种较为准确的分位数分析和预测手段^[2,5-7]。

通过对不同时段位移监测序列进行 POT 建模分析,得到预警指标实时估计序列,再利用尖点突变理论对其变化趋势进行性态突变诊断,结合某边坡工程实例,对该法的合理性进行了验证。

收稿日期: 2015-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51179066, 51409167, 81279052, 2014513311); 国家重点实验室研究资助项目(20145028312); 江苏省杰出青年基金资助项目(BK2012036); 江苏省“333 高层次人才培养工程”科研项目(2016-B1307101)

作者简介: 任 杰(1992—),男,山西临汾人,硕士研究生,主要从事水工结构工程安全监控研究。

E-mail: 1538406080@qq.com

1 边坡位移预警指标估计极值 POT 模型

1.1 GPD 分布与 POT 模型

利用 GPD 分布拟合超阈值序列来渐进地刻画分布的尾部特征是建立 POT 模型的基础。GPD 分布定义为:

$$G_{\varepsilon,u,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \varepsilon \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-1/\varepsilon}, & \varepsilon \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma}\right), & \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: ε 为形状参数;当 $\varepsilon \geq 0$ 时, $x \geq 0$;当 $\varepsilon < 0$ 时, $u < x < -\sigma/\varepsilon$; u 为位置参数; σ 为尺度参数。 $\varepsilon = 0$ 的情况可由 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得到,故下文研究 $\varepsilon \neq 0$ 的情况。

1.2 超阈值分布函数 (CEDF) 和总体分布函数

对于某时段内边坡位移监测序列 $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$, 未知总体分布函数为 $F(x)$, 假设阈值为 u , 超阈值测值个数为 n_u , 超阈值序列 $\{y_i | y_i = x_i - u, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n_u\}$, 定义 $F_u(y)$ 为 CEDF。

$$F_u(y) = P(x - u \leq y | x > u), \quad y \geq 0 \quad (2)$$

式中: $0 \leq y < x_F - u$; $x_F \leq \infty$ 为 F 的右边界。

根据条件概率公式,可得总体分布函数:

$$F(x) = F(u) + (1 - F(u)) F_u(y) \quad (3)$$

由 PBDH 定理^[3-4]可知:随着阈值 u 的不断增大,即 u 取得充分大时,超阈值序列的分布函数近似于 GPD 分布, $F_u(y) \approx G_{\varepsilon,u,\sigma}(x)$, $F_u(y) \approx G_{\varepsilon,\sigma}(x - u) = G_{\varepsilon,\sigma}(y)$, 即:

$$F_u(y) \approx G_{\varepsilon,\sigma}(y) = 1 - \left(1 + \varepsilon \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (4)$$

利用经验分布函数代替 $F(u)$, 即 $F(u) = 1 - n_u/n$, 此时 $F(x)$ 得以确定:

$$F(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left(1 + \varepsilon \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (5)$$

1.3 位移监测序列厚尾检验

针对位移监测序列 $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$, 利用 QQ 图法对其进行厚尾检验。以标准正太分布的分位数为横坐标, 序列值为纵坐标建立正太 QQ 散点分布图。若散点近似分布于一条直线附近, 位移序列可能近似正态分布;若 QQ 图的中部为直线, 上端向右偏离该直线, 向下倾斜, 则位移序列分布的上尾可能具有厚尾性;若 QQ 图的中部为直线, 下端向左偏离该直线, 向上翘起, 则位移序列分布的下尾可能具有厚尾性^[8]。

1.4 阈值 u 拟定的 Hill 图法

利用 GPD 分布拟合超阈值序列, 需解决阈值 u 拟定这个关键问题, 同时阈值 u 也是准确估计参数 ε 和 σ 的前提。若阈值 u 的拟定过高, 超阈值序列样本容量少, 使得参数估计的方差过大;若阈值 u 的拟定过低, 则有可能不满足 PBDH 定理成立的条件, 使得超阈值序列样本分布与 GPD 分布产生较大差异。阈值拟定方法分作图法与数值算法两类^[6,9]。本文借助 Hill 图法进行阈值 u 的拟定。

位移监测序列 $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$, 其顺序统计量为 $x_{n,n} \geq \dots \geq x_{i,n} \geq \dots \geq x_{1,n}$, 定义 $H_{k,n}$ 为其极值指数的 Hill 估计。

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log x_{n-i+1,n} - \log x_{n-k,n}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (6)$$

点集合 $\{(k, H_{k,n} - 1) | 1 \leq k \leq n-1\}$ 构成的曲线即为 Hill 图, 选取曲线中首次出现的相对平稳区域, 该区域起始点的横坐标 k 便是超阈值个数, k 所对应的顺序统计量 $x_{n-1+k,n}$ 便是阈值。Loretan and Phillips 通

过仿真方法指出阈值选择应使得尾部样本数目不超过样本总规模的 10%, 本文依具体情况加以借鉴^[10]。

1.5 GPD 分布参数估计

GPD 分布参数估计的方法有极大似然估计法、概率矩法以及 L 矩估计法等。本文采用最常用的极大似然估计法对 GPD 分布参数进行估计。

$$\text{GPD 分布的密度函数为: } g_{\varepsilon, \sigma}(y) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \varepsilon \frac{y}{\sigma} \right)^{-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (7)$$

$$\text{似然函数: } L = L(y_1, \dots, y_{n_u}; \varepsilon, \sigma) = \prod_{i=1}^{n_u} g_{\varepsilon, \sigma}(y_i) \quad (8)$$

上式取对数, 对 $\log L$ 中 ε 和 σ 分别求偏导, 令偏导为零, 可求得 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{\sigma}$ 。

$$\left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \varepsilon} \quad \frac{\partial \log L}{\partial \sigma} \right\}^T = 0 \quad (9)$$

至此, 根据上文公式及计算所得参数便可确定式(5)的分布函数。据分布函数反函数, 结合边坡失事概率, 可以求得边坡位移预警指标估计值。

2 边坡位移预警指标性态诊断突变理论

2.1 尖点突变模型

突变理论是以奇点理论、稳定性理论等数学理论为基础, 用以研究微积分方法不能解释的不连续变化现象的理论^[11-12]。突变理论通过给出系统在突变过程的势函数, 研究其突变流形和分叉集进而确定系统所属状态。根据边坡失稳特征, 采用尖点突变模型判别其稳定性^[13-14]。

$$\text{边坡稳定分析尖点突变模型势函数: } V(x) = x^4 + ux^2 + vx \quad (10)$$

式中: x 为边坡状态变量; u, v 为边坡控制变量。

$$\text{对势函数求一次导数, 得到突变流形: } V'(x) = 4x^3 + 2ux + v = 0 \quad (11)$$

$$\text{突变流形的实根个数由下式 } \Delta \text{ 符号判断: } \Delta = 8u^3 + 27v^2 \quad (12)$$

$\Delta > 0$ 时有一个实根, 边坡处于稳定状态; $\Delta < 0$ 时有 3 个互异实根, 边坡处于非稳定状态; $\Delta = 0$ 时, 边坡处于临界状态。

2.2 边坡预警指标尖点突变模型

本文采用经验方法^[11, 13]建立尖点突变模型。对于边坡预警指标估计序列, 采用最小二乘法进行数据拟合, 得到突变流形结果如下式所示:

$$h(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (13)$$

式中: t 为年份; $h(t)$ 为相对应的预警指标估计值。对其进行初等变换消去平方项, 并对 x 积分, 得到势函数 $H(x)$, 再令 $V(x) = 4/aH(x)$ 得:

$$V(x) = x^4 + \frac{2}{a} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x^2 + \frac{4}{a} \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) x + \frac{4e}{a} \quad (14)$$

$$\text{故: } u = \frac{2}{a} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right); \quad v = \frac{4}{a} \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right) \quad (15)$$

计算所得 u 和 v , 代入式(12)中可计算 Δ , 进而判别预警指标序列的稳定状态。分析过程中, 往往需确定突变点位置, 本文借鉴文献[15]的方式确定出在何时发生了突变。年份为 t_i 时, 取前 i 年的预警指标估计序列进行式(13)~(15)计算, 并获取 Δ_i , 当 $\Delta_i = 0$ 时, 所对应年份即为突变发生临界年份, 若前 i 年数不足以进行式(13)拟合, 则通过线性插值使点数增加。

3 边坡工程实例

为阐述建模方法, 验证模型可靠性, 本文以黄河流域某边坡工程为例, 依据该边坡某测点 2009—2013 年

垂直方向位移监测数据,以年为区间,获得2009年73个监测数据,2010年170个监测数据,2011年165个监测数据,2012年261个监测数据,2013年70个监测数据,结合边坡实际情况及上下游区域概况,依经验^[2,16-17]假定该边坡失事概率为1%,依前文建模方法,得到位移预警指标估计值,并对预警指标估计值序列进行突变诊断。考虑到监测数据具有非等时距性,为平缓数据,本文以该测点垂直位移日变化量(向下取正,单位:mm/d)为研究对象。

3.1 监测数据厚尾检验

2009—2013年监测数据厚尾检验见图1。由图1可知,监测数据中间部分近似直线,呈微凹型,下端翘起,具有厚尾分布,满足极值POT模型成立的前提条件。

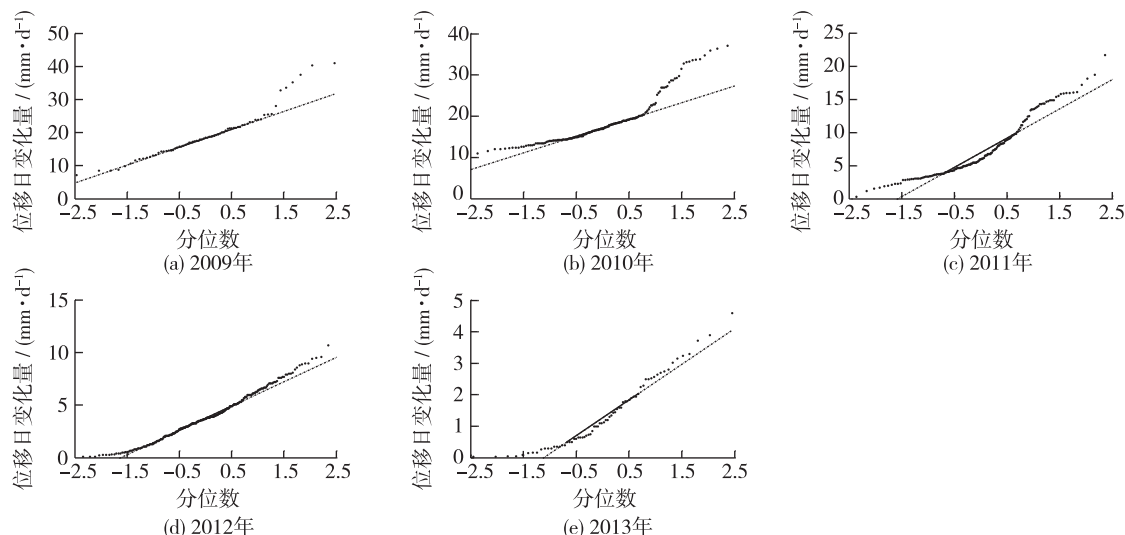


图1 2009—2013年监测数据厚尾检验

Fig. 1 Heavy-tailed tests for monitoring data of 2009—2013

3.2 Hill图法拟定阈值 u

根据1.4节中阈值的拟定方法,绘出2009—2013年Hill曲线图(见图2),确定相应年份阈值。

根据Hill图中数据变化急缓情况,并结合已有学者文献^[10]的研究,拟定每年的 k 值,并由 k 值得到对应的阈值 u ,假定边坡失事概率为1%,由式(6)计算 $F(x)$ 反函数,得到预警指标估计值序列。结合年极值,将结果列于表1。为便于分析与比较,据表1绘制图3。

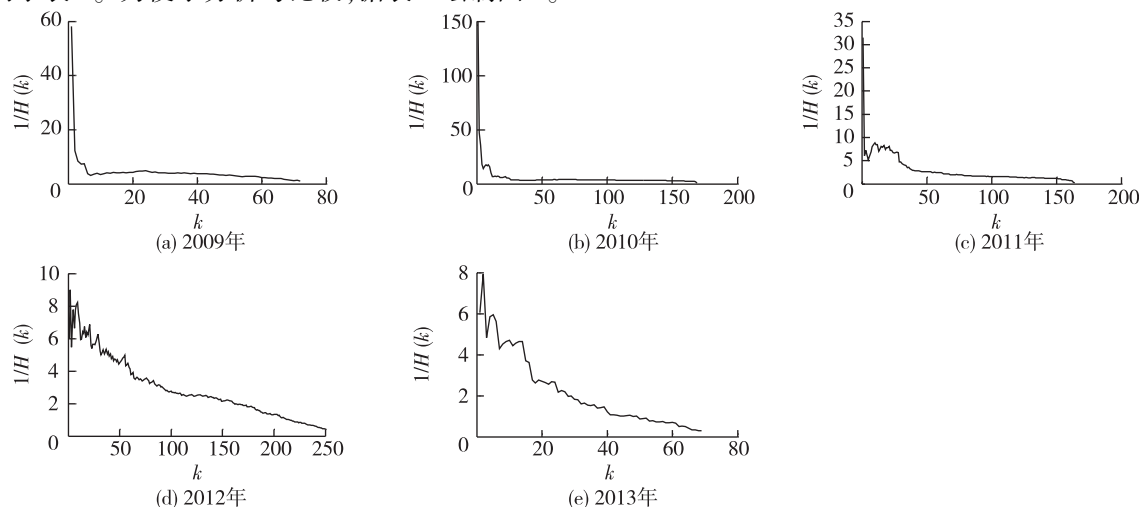


图2 2009—2013年Hill图

Fig. 2 Hill figures of 2009—2013

表 1 各年份参数

Tab. 1 Corresponding parameters between k and u

参数	2009 年	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年
k	6	12	16	33	14
u ($\text{mm} \cdot \text{d}^{-1}$)	32.76	31.50	14.90	6.70	2.50
位移预警指标 估计值 ($\text{mm} \cdot \text{d}^{-1}$)	41.33	37.14	37.29	18.50	6.75
年极值 ($\text{mm} \cdot \text{d}^{-1}$)	41.07	37.40	22.40	13.00	4.60

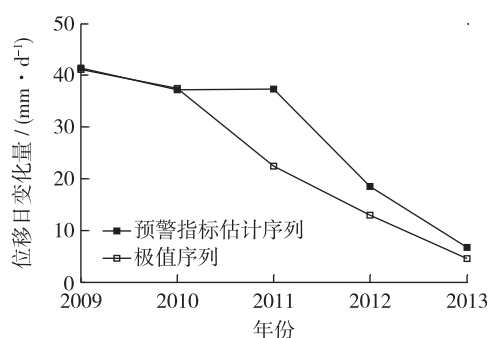


图 3 预警指标估计序列与极值序列对比

Fig. 3 Comparison between sequences of early warning indicator and extreme value

3.3 尖点突变模型诊断预警指标估计值序列

利用本文 3.2 节方法对预警指标估计值序列建立尖点突变模型,建模过程中需对序列进行线性插值,补充点数 $t_{i+1/2}$ ($i = 2009, \dots, 2012$)。

利用式(15)计算 u 和 v ,并代入式(12)中计算 Δ_i 进行诊断。可以得到在 2011 年 $\Delta_3 \approx 0$,预警指标处于临界状态, $\Delta_i > 0$ ($i \neq 3$),预警指标处于稳定状态。

3.4 结 论

据表 1、图 3 及 Δ_i 的计算结果可以看出:

- (1) 2009—2013 年期间阈值、预警指标估计值以及极值都呈下降趋势,反应边坡向安全性态发展;
- (2) 2009—2010 年间,该边坡的位移预警值略小于年极值,该边坡处于危险状态,2010 年以后,预警值均高于年极值,该边坡处于安全状态;
- (3) 2011 年时,状态判别式 $\Delta \approx 0$,说明位移预警指标估计值序列处于临界状态,任之发展,将会发生突变,即 $\Delta < 0$,之后却发现 $\Delta > 0$,显而易见,边坡位移预警指标估计值向好的方向发生了转变。2009 年发现,该边坡位移变化呈增大趋势,便通过控制水库水位升降、边坡处理等工程措施加以控制,突变理论印证了采取控制措施后取得了实质性效果。

4 结 语

极值理论 POT 模型以超阈值序列的 GPD 分布特征为研究对象,全面地考虑了所有较大测值,更好地刻画了数据样本的超阈值分布特征,因此得到的预警指标估计值能更客观地反映工程实际。

本文将基于极值理论的 POT 模型应用于边坡位移预警指标估计中,通过分析研究,该边坡处于安全状态,并通过突变理论印证了控制措施起到了实质性作用,这与边坡实际情况较为吻合,与该边坡实际监测资料成果分析一致。研究分析表明极值 POT 模型与突变诊断模型相结合应用于边坡位移预警指标估计与诊断上具有一定的科学性,较为可靠。

本文中边坡失事概率尚无具体规范可依,依经验对其假定,具有主观性;监测数据具有时间间隔性,为平缓数据使其满足 GPD 分布,仅做了平均处理;建立 POT 模型的过程中,为简化分析,仅考虑超阈值序列数值大小而忽略超阈值序列的时间效应。为更加客观地估计预警指标,存在的这些不足,需进一步进行研究与完善。

参 考 文 献:

- [1] 张振华,冯夏庭,周辉,等. 基于设计安全系数及破坏模式的边坡开挖过程动态变形监测预警方法研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(3): 603-612. (ZHANG Zhen-hua, FENG Xia-ting, ZHOU Hui, et al. Research on dynamic early warning method of

- slope deformation monitoring during excavation based on design safety factor and failure mode[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(3): 603-612. (in Chinese))
- [2] 苏怀智,王峰,刘红萍. 基于 POT 模型建立大坝服役性态预警指标[J]. 水利学报, 2012, 43(8): 974-978, 986. (SU Huai-zhi, WANG Feng, LIU Hong-ping. Early-warning index for dam service behavior based on POT model[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012, 43(8): 974-978, 986. (in Chinese))
- [3] BALKEMA A A, DE HAAN L. Residual life time at great age[J]. Annals of Probability, 1974(2): 792-804.
- [4] PICKANDS J. Statistical inference using extreme order statistics[J]. Annals of Statistics, 1975(3): 119-131.
- [5] 花拥军,张宗益. 极值 BMM 与 POT 模型对沪深股市极端风险的比较研究[J]. 管理工程学报, 2009, 23(4): 104-108, 115. (HUA Yong-jun, ZHANG Zong-yi. Comparative research on extreme risk of stock market based on BMM and POT model [J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2009, 23(4): 104-108, 115. (in Chinese))
- [6] 陈红英. POT 模型在巨灾保险中的应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2010. (CHEN Hong-ying. Application of POT model to catastrophe insurance[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2010. (in Chinese))
- [7] 钱小仕,王福昌,盛书中. 基于广义帕累托分布的地震震级分布尾部特征分析[J]. 地震学报, 2013, 35(3): 341-350. (QIAN Xiao-shi, WANG Fu-chang, SHENG Shu-zhong. Characterization of tail distribution of earthquake magnitudes via generalized Pareto distribution[J]. Acta Seismologica Sinica, 2013, 35(3): 341-350. (in Chinese))
- [8] 边宽江,程波,王蕾蕾. 收益分布尖峰厚尾问题的统计检验[J]. 统计与决策, 2009(7): 83-85. (BIAN Kuan-jiang, CHENG Bo, WANG Lei-lei. Problems about peak and fat-tail of income distribution based on statistics test[J]. Statistics & Decision, 2009(7): 83-85. (in Chinese))
- [9] HILL B M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1975, 3(5): 1163-1174.
- [10] LORETAN M, PHILLIPS P C B. Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: an overview of the theory with applications to several financial datasets[J]. Journal of Empirical Finance, 1994, 1(2): 211-248.
- [11] 凌复华. 突变理论及其应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1987. (LING Fu-hua. Catastrophe theory and its application [M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1987. (in Chinese))
- [12] 阿诺德. 突变理论[M]. 周燕华, 译. 北京: 高等教育出版社, 1990. (ARNOLD V I. Catastrophe theory[M]. Translated by ZHOU Yan-hua. Beijing: Higher Education Press, 1990. (in Chinese))
- [13] 姜璐,于连宇. 初等突变理论在社会科学中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2002(10): 113-117. (JIANG Lu, YU Lian-yu. The application of primary catastrophe theory to social science[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2002(10): 113-117. (in Chinese))
- [14] 丁晓唐,顾冲时,蒋勇. 基于有限元和突变理论的高拱坝坝体稳定研究[J]. 河海大学学报:自然科学版, 2008, 36(2): 175-178. (DING Xiao-tang, GU Chong-shi, JIANG Yong. Analysis of stability of high arch dams based on FEM and catastrophe theory[J]. Journal of Hohai University(Natural Sciences), 2008, 36(2): 175-178. (in Chinese))
- [15] 郑东健,雷霆. 基于突变理论的高拱坝失稳判据研究[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 23-27. (ZHENG Dong-jian, LEI Ting. Instability criteria for high arch dams using catastrophe theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(1): 23-27. (in Chinese))
- [16] 雷鹏,常晓林,肖峰,等. 高混凝土坝空间变形预警指标研究[J]. 中国科学:技术科学, 2011, 41(7): 992-999. (LEI Peng, CHANG Xiao-lin, XIAO Feng, et al. Study on early warning index of spatial deformation for high concrete dam[J]. Sci China Tech Sci, 2011, 41(7): 992-999. (in Chinese))
- [17] 华祖林,汪靓,顾莉,等. 基于门限极值理论的湖泊水质参照状态的确定[J]. 中国环境科学, 2014, 34(12): 3215-3222. (HUA Zu-lin, WANG Liang, GU Li, et al. Estimation of the lake quality reference condition based on the threshold extreme theory[J]. China Environmental Science, 2014, 34(12): 3215-3222. (in Chinese))

Real-time estimation and diagnosis of early warning indicator of slope displacement based on POT-catastrophe theory

REN Jie^{1,2}, SU Huai-zhi^{1,2}, YANG Meng^{1,2}, ZHOU Zhi-jie²

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Real-time estimation and diagnosis of slope early warning indicators are important means to monitor the safety state of slope and prevent the situation of the evolution from slope to landslide. Safety early warning pays more attention to extreme events, which are not common. The key to achieve safety early warning lies in whether we can accurately analyze the quantile of the slope effect quantity sequences and describe the tail characteristics of the slope effect quantity sequences. First of all, the slope displacement monitoring sequence can be divided by the interval of time; then, the thresholds of the slope displacement monitoring sequences at each time interval are drafted using Hill figure method; the part of the displacement monitoring sequence at each time interval that is supra-threshold is fitted by Generalized Pareto Distribution (GPD), and the tail characteristics of the part that is supra-threshold of displacement monitoring sequences are described progressively. So, the ability of the slope to resist historical loads is analyzed based on the model of peaks over threshold (POT) using extreme value theory. If the failure probability of the slope is provided, the real-time estimation sequences of early warning indicators of displacement can be obtained and the ability of the slope to resist extreme loads that may happen in the future can be exploited and evaluated. Finally, the real-time estimation sequences of early warning indicators of displacement are diagnosed by using cusp catastrophic model from catastrophe theory. Based on specific slope projects, the rationality of the mixed model of POT and catastrophe theory is verified and the modeling method of the mixed model will be a new way to achieve the real-time estimation and diagnosis of engineering early warning indicators.

Key words: slope; early warning indicator of displacement; extreme value theory; POT model; cusp catastrophic theory