

# 混凝土 $K_R$ 阻力曲线的实用解析方法

莫卓凯, 董伟, 吴智敏, 曲秀华

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 根据混凝土 I 型裂缝扩展准则, 提出了新的  $K_R$  阻力曲线及计算新方法。该  $K_R$  阻力曲线认为, 裂缝的扩展阻力由混凝土材料起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$  和黏聚力提供的阻力组成并等于裂缝扩展的驱动力。采用该方法, 只需给出混凝土的起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$ , 弹性模量  $E$ , 抗拉强度  $f_t$  和断裂能  $G_F$  便可计算混凝土的  $K_R$  阻力曲线, 而无需测定试件的荷载-裂缝口张开位移 (P-CMOD) 全曲线。在此基础上, 研究了混凝土三点弯曲梁试件强度等级从 C20 到 C120 的  $K_R$  阻力曲线, 计算了强度相同初始缝高比不同以及初始缝高比相同而试件高度不同的混凝土  $K_R$  阻力曲线, 并探讨了各种情况下的断裂过程区长度以及黏聚力分布。研究表明: 混凝土强度等级提高,  $K_R$  阻力曲线上升, 但其上升幅值逐渐减小, 强度等级在 C60 以后, 其上升幅值趋于稳定; 混凝土的  $K_R$  阻力曲线存在一定的尺寸效应, 当韧带长度足够大时,  $K_R$  阻力先增大, 而后趋于稳定; 混凝土强度等级提高, 最大完整断裂过程区长度减小; 试件的尺寸对断裂过程区长度也有着较大影响。

**关键词:** 混凝土;  $K_R$  阻力曲线; 断裂过程区; 裂缝; 黏聚力; 起裂断裂韧度

**中图分类号:** TV431

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1009-640X(2014)03-0009-09

混凝土是一种多相复合材料, 其破坏和断裂机理非常复杂。很多大型混凝土结构如混凝土坝等的破坏都是由裂缝引起的, 所以研究混凝土结构的裂缝扩展  $K_R$  阻力曲线有着重要的意义。为了描述裂缝在混凝土材料中的扩展, 许多学者开始研究以应力强度因子形式描述的裂缝扩展阻力及其相关特征。

阻力曲线概念最早由 G. R. Irwin<sup>[1]</sup> 在 20 世纪五六十年代提出, 该理论认为当裂缝扩展所需的驱动力与材料本身所具有的裂缝扩展阻力相等, 且裂缝扩展驱动力增长的速率与裂缝扩展阻力增长的速率相等时裂缝失稳扩展。随后, J. C. Lenain 和 A. R. Bunsell<sup>[2]</sup> 将此概念应用于石棉水泥材料中的裂缝扩展。研究表明,  $K_R$  阻力曲线先随着裂缝扩展长度的增加而显著增长, 而后达到稳定值。Z. P. Bazant<sup>[3]</sup> 根据 Irwin 理论, 结合尺寸效应模型提出了基于断裂能的混凝土  $R$  阻力曲线的概念。他认为尺寸效应是存在的, 并经过回归分析得到  $R$  阻力曲线的表达式。徐世烺和 H. W. Reinhardt<sup>[4]</sup> 结合虚拟裂缝模型<sup>[5]</sup> 提出了以应力强度因子表述的  $K_R$  阻力曲线理论。该理论考虑了裂缝黏聚力的闭合作用, 认为裂缝扩展阻力由混凝土的起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$  和裂缝扩展黏聚力所提供的阻力组成, 并根据试验测得的 P-CMOD 曲线计算了  $K_R$  阻力曲线。丁生根<sup>[6]</sup> 采用实用解析法<sup>[7]</sup> 计算了混凝土基于虚拟裂缝闭合力  $K_R$  阻力曲线。与传统的数值积分方法相比, 实用解析法算式简单, 计算过程简便, 同时具有很高的精度。S. Kumar 和 S. V. Barai<sup>[8]</sup> 采用了权函数法计算  $K_R$  阻力曲线, 并与以往的分析方法作了对比。结果表明, 权函数法提高了计算效率, 并且没有明显的误差。但以上所计算的  $K_R$  阻力曲线均未考虑混凝土裂缝扩展中断裂过程区的变化, 并且 P-CMOD 曲线和断裂能的取值相互独立, 与实际情况相矛盾。董伟等<sup>[9]</sup> 根据混凝土 I 型裂缝扩展准则<sup>[10]</sup>, 将起裂断裂韧度作为材料参数, 提出了一种新的计算混凝土结构裂缝扩展过程  $K_R$  阻力曲线模型。该模型认为, 裂缝扩展阻力由混凝土材料固有的抗裂能力和黏聚力提供的阻力组成并与裂缝扩展的驱动力相等, 并根据试验测得的混凝土

收稿日期: 2013-11-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51109026)

作者简介: 莫卓凯(1989-), 女, 湖南益阳人, 硕士研究生, 主要从事混凝土断裂机理研究。E-mail: mozhuok@163.com

起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$ , 弹性模量  $E$  及抗拉强度  $f_t$ , 采用有限元法计算了混凝土裂缝扩展  $K_R$  阻力曲线而无需测定混凝土试件的荷载-裂缝口张开位移曲线。

很多学者还对影响混凝土  $K_R$  阻力曲线的因素进行了研究。徐世焯和 H. W. Reinhardt<sup>[5]</sup> 的研究结果表明,  $K_R$  阻力曲线与材料本身的特性有关, 与试件的尺寸无关。S. Kumar 和 S. V. Barai<sup>[11]</sup> 采用三点弯曲梁试件和紧凑拉伸试件研究了试件型式和试件尺寸对  $K_R$  阻力曲线的影响, 研究发现  $K_R$  阻力曲线与试件的型式无关, 但与试件尺寸相关。徐锋等<sup>[12]</sup> 根据试验测得的 P-CMOD 曲线, 研究了断裂过程区长度对  $K_R$  阻力曲线的影响, 发现  $K_R$  阻力随着裂缝扩展而增大, 但达到完整断裂过程区长度后, 会趋于恒定值。

尽管国内外对混凝土的  $K_R$  阻力曲线进行了大量研究, 但仍有以下工作要做: ①没有考虑混凝土裂缝扩展中断裂过程区的变化; ②P-CMOD 曲线与断裂能的取值相互独立, 与实际情况相矛盾; ③缺乏对高强混凝土  $K_R$  阻力曲线方面的研究; ④关于试件尺寸对  $K_R$  阻力曲线是否存在影响, 仍没有一致的结论。

针对上述问题, 本文基于混凝土裂缝扩展准则, 采用解析方法, 研究混凝土三点弯曲梁试件强度等级从 C20 到 C120 的  $K_R$  阻力曲线, 研究强度相同初始缝高比不同以及初始缝高比相同而试件高度不同的混凝土  $K_R$  阻力曲线并讨论其尺寸效应, 还对不同情况下的断裂过程区长度的变化规律进行研究。

## 1 基于裂缝扩展准则的 $K_R$ 阻力曲线

根据双  $K$  断裂准则<sup>[13]</sup>, 整个断裂过程可以分为 3 个阶段: 当  $K = K_{Ic}^{ini}$  时, 裂缝起裂; 当  $K_{Ic}^{ini} < K \leq K_{Ic}^{ini}$  时, 裂缝稳定扩展; 当  $K > K_{Ic}^{ini}$  时, 裂缝失稳扩展。由于混凝土裂缝失稳扩展前存在着主裂缝的稳定扩展阶段, 根据虚拟裂缝模型, 试件除受外荷载  $P$  作用外, 还受阻止裂缝扩展的黏聚力  $\sigma(w)$  的作用。根据叠加原理:

$$K = K_{Ip} - K_{I\sigma} \quad (1)$$

式中:  $K_{Ip}$  为由外荷载  $P$  引起的裂缝尖端应力强度因子;  $K_{I\sigma}$  为由黏聚力  $\sigma(w)$  引起的裂缝尖端应力强度因子。

如果将裂缝尖端向前扩展过程再进一步细化, 可将每一次裂缝的扩展都看成是裂缝尖端混凝土的一次起裂, 则整个断裂过程就可以认为是由若干个起裂过程所组成, 其中起裂韧度就是判断这些起裂发生的标准, 即裂缝扩展准则<sup>[9]</sup>。假设在每一步裂缝扩展中, 荷载都经历从零增长达到该裂缝步的起裂荷载使裂缝扩展这一过程, 则裂缝每一步扩展都将经历裂缝起裂阶段, 而在下一步裂缝扩展中荷载又经历这一过程。具体表述为: ①当  $K_{Ip} - K_{I\sigma} < K_{Ic}^{ini}$  时, 裂缝不扩展; ②当  $K_{Ip} - K_{I\sigma} = K_{Ic}^{ini}$  时, 裂缝处于临界状态; ③当  $K_{Ip} - K_{I\sigma} > K_{Ic}^{ini}$  时, 裂缝扩展。

徐世焯等<sup>[5]</sup> 认为  $K_R$  阻力曲线由两部分构成: 一部分是起裂前混凝土材料所固有的抗裂性能, 即为起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$ ; 另一部分为随着主裂缝的扩展, 由分布在断裂过程区上的黏聚力所产生的扩展阻力, 可表示为  $K_{I\sigma}$ , 则  $K_R$  阻力曲线可表示为:

$$K_R(\Delta a) = K_{Ic}^{ini} + K_{I\sigma} \quad (2)$$

而在裂缝扩展过程中, 裂缝扩展准则的表达式为<sup>[9]</sup>:  $K_{Ip}(P, \Delta a) - K_{I\sigma} = K_{Ic}^{ini}$  (3)

对比式(2)与式(3), 可以得到:  $K_{Ip}(P, \Delta a) = K_R(\Delta a) = K_{Ic}^{ini} + K_{I\sigma}$  (4)

式中:  $\Delta a$  为对应于  $P$  时的裂缝扩展量。

根据裂缝扩展准则, 外力为裂缝扩展的驱动力, 它克服阻力使裂缝扩展。无论荷载处于上升段还是下降段, 都有与其相对应的裂缝扩展量  $\Delta a$ , 该驱动力克服阻力使裂缝继续扩展, 即阻力与驱动力是相同的。将同一构件不同裂缝长度及与其相对应的驱动力所产生的应力强度因子建立函数关系, 即可计算混凝土的  $K_R$  阻力曲线。

## 2 $K_R$ 阻力曲线的实用解析方法

计算混凝土裂缝扩展全过程的  $K_R$  阻力曲线, 需要确定  $K_{Ip}(P, \Delta a)$ ,  $K_{I\sigma}$ ,  $K_{Ic}^{ini}$  的值。起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$  是

材料参数,只跟混凝土材料本身的性质有关。

本文采用标准三点弯曲梁试件(见图1),外力产生的应力强度因子  $K_{Ic}(P, \Delta a)$  可以由 H. Tada 等<sup>[14]</sup> 提出的表达式求得:

$$K_{Ic}(P, \Delta a) = \frac{3PS\sqrt{a}}{2D^2B} F_1(a/D) \quad (5)$$

$$F_1(a/D) = \frac{1.99 - (a/D)(1 - a/D)[2.15 - 3.93(a/D) + 2.7(a/D)^2]}{(1 + 2a/D)(1 - a/D)^{3/2}} \quad (6)$$

式中: $a$  为有效裂缝长度; $D$  为试件高度; $B$  为试件厚度; $S$  为试件跨度。

根据文献<sup>[15]</sup>,由黏聚力产生的应力强度因子  $K_{Ic}$  为:

$$K_{Ic} = \int_{a_0}^a 2\sigma(x) F_2(x/a, a/D) \sqrt{\pi a} dx \quad (7)$$

$$F_2(x/a, a/D) = \frac{3.52(1 - x/a)}{(1 - a/D)^{3/2}} - \frac{4.35 - 5.28(x/a)}{(1 - a/D)^{1/2}} + \left\{ \frac{1.3 - 0.3(x/a)^{3/2}}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} + 0.83 - 1.76(x/a) \right\} [1 - (1 - x/a)(a/D)] \quad (8)$$

式中: $\sigma(x)$  为  $x$  处的黏聚应力; $a_0$  为初始裂缝长度。

根据 P. E. Peterson<sup>[16]</sup> 建议的双线性软化本构曲线(如图2所示), $\sigma(x)$  的表达式如下:

$$\sigma(x) = \begin{cases} f_t - (f_t - \sigma_s)(w/w_s) & , 0 \leq w \leq w_s \\ \sigma_s(w_0 - w)/(w_0 - w_s) & , w_s < w < w_0 \\ 0 & , w \geq w_0 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $f_t$  为混凝土的抗拉强度; $w$  为裂缝张开位移。

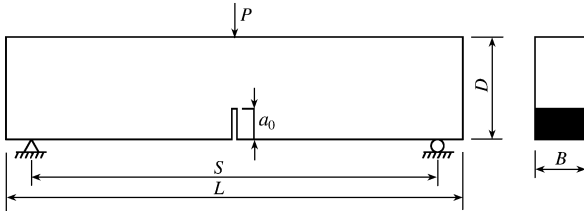


图1 混凝土三点弯曲梁

Fig. 1 Three-point bending beam

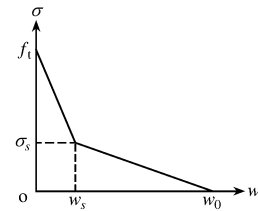


图2 双线性软化本构曲线

Fig. 2 Curve of bilinear softening traction-separation law

$\sigma_s, w_s$  与  $w_0$  的值可以分别由以下式求出,  $G_F$  为混凝土的断裂能:

$$\sigma_s = f_t/3, \quad w_s = 0.8G_F/f_t, \quad w_0 = 3.6G_F/f_t \quad (10)$$

有效裂缝长度扩展到  $a$  时,  $x$  处对应的裂缝张开位移  $w$  可用文献<sup>[15]</sup> 中的公式求得:

$$w = CMOD \left\{ (1 - x/a)^2 + [1.081 - 1.149(a/D)] [x/a - (x/a)^2] \right\}^{1/2} \quad (11)$$

而  $CMOD$  的值由 H. Tada<sup>[14]</sup> 提出的公式求得:

$$CMOD = \frac{24P\lambda}{EB} \left[ 0.76 - 2.28\lambda + 3.87\lambda^2 - 2.04\lambda^3 + \frac{0.66}{(1 - \lambda)^2} \right] \quad (12)$$

式中: $E$  为混凝土的弹性模量;  $\lambda = (a - H_0)/(D + H_0)$ ;  $H_0$  为放置夹式引伸仪的刀片边缘厚度。

综上所述,  $K_{Ic}$  可以由式(7)~(12)求得。

### 3 试验及结果分析

#### 3.1 材料参数的选取

通过前文可以看出,要得到所需的计算结果,除了试件的尺寸外,还需要4个基本的材料参数:起裂断裂

韧度  $K_{Ic}^{ini}$ , 弹性模量  $E$ , 抗拉强度  $f_t$  和断裂能  $G_F$ 。

根据欧洲混凝土模式规范 CEB-FIB Model Code 2010<sup>[17]</sup>, 混凝土的弹性模量  $E$  和断裂能  $G_F$  可以通过下式求得:

$$E = E_{c0} \alpha_E \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad (13)$$

$$G_F = 73 f_{cm}^{0.18} \quad (14)$$

式中:  $E_{c0} = 21.5 \times 10^3$  MPa;  $\alpha_E = 1.0$ ;  $f_{cm} = f_{ck} + \Delta f$ ,  $f_{ck}$  为圆柱体抗压强度标准值,  $\Delta f = 8$  MPa。

起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$  是只与材料本身性质相关的参数。根据文献[9, 18-23]的试验数据, 将文献中的立方体抗压强度平均值通过变异系数<sup>[24]</sup>转化为立方体抗压强度标准值, 再转化为圆柱体抗压强度标准值, 统计得到的圆柱体抗压强度与起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$  的散点图见图3。线性拟合图3可得以下公式:

$$K_{Ic}^{ini} = 0.46181 + 0.01011 f_{ck} \quad (15)$$

利用以上材料参数的公式, 得到所需的材料参数列于表1。采用上节的解析方法, 对3组不同的混凝土试件进行  $K_R$  阻力曲线计算。

表1 材料参数

Tab. 1 The material parameters of concrete

圆柱体抗压强度 $f_{ck}$ / MPa	抗拉强度 $f_t$ / MPa	弹性模量 $E$ / GPa	断裂能 $G_F$ / (N · m <sup>-1</sup> )	起裂韧度 $K_{Ic}^{ini}$ / (MPa · m <sup>0.5</sup> )
20	2.2	30.30	132.99	0.664 0
40	3.5	36.27	146.54	0.866 2
60	4.4	40.73	156.02	1.068 4
80	4.8	44.39	163.43	1.270 6
100	5.2	47.52	169.57	1.472 8
120	5.6	50.29	174.83	1.675 0

这3组试件分别为:

第1组, 同一尺寸不同混凝土强度的试件。强度等级分别为 C20, C40, C60, C80, C100 和 C120 的混凝土三点弯曲梁试件。试件尺寸相同, 跨度  $S$  为 800 mm, 高度  $D$  为 200 mm, 厚度  $B$  为 100 mm, 初始缝高比  $a_0/D$  都为 0.4。

第2组, 同一强度不同缝高比的试件。强度等级均为 C40 的混凝土三点弯曲梁试件, 试件尺寸同第1组一致。而初始缝高比  $a_0/D$  分别为 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 和 0.8。

第3组, 同一缝高比不同试件高度的试件。强度等级均为 C40 的混凝土三点弯曲梁试件, 试件初始缝高比  $a_0/D$  为 0.4, 试件厚度  $B$  为 100 mm。试件高度  $D$  分别为 200, 400, 600, 800, 1 000, 1 500 和 2 000, 试件的跨高比  $S/D$  都为 4。

### 3.2 $K_R$ 阻力曲线的计算结果分析

利用上述解析方法, 输入每组所需的材料参数, 即可得到每组  $K_R$  阻力曲线。

将第1组  $K_R$  阻力曲线的计算结果绘于图4中。横坐标  $\Delta a / (D - a_0)$  为有效裂缝扩展长度与韧带长度之比, 纵坐标为  $K_R$  阻力值。从图4可知, 随着混凝土强度的提高,  $K_R$  阻力曲线增大, 但其增长幅值逐渐减小, 强度等级达到 C60 之后, 其增长幅值趋于稳定。这是因为  $K_{Ic}$  曲线(见图5)随强度的增加而增加, 并在强度等级高于 C60 后, 接近重合; 而起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$  的增长幅值基本稳定。

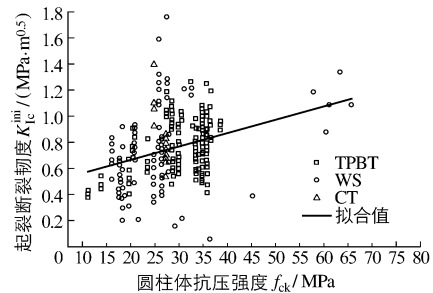


图3 起裂断裂韧度分布

Fig. 3 Initial fracture toughness for different compressive strengths



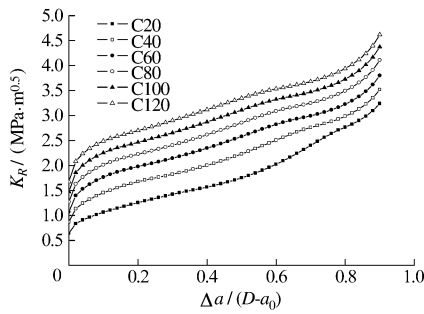


图4  $K_R$  阻力曲线随强度等级的变化

Fig. 4  $K_R$  curves for different strength grades

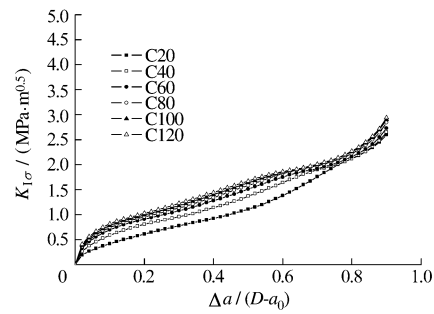


图5  $K_{I\sigma}$  曲线随强度等级的变化

Fig. 5  $K_{I\sigma}$  curves for different strength grades

将第2组的  $K_R$  阻力曲线的计算结果绘于图6中。从图6可知,试件的初始缝高比对混凝土  $K_R$  阻力曲线有一定的影响,不同试件初始缝高比的  $K_R$  阻力曲线在  $\Delta a / (D - a_0)$  为0.6之前,随初始缝高比的增大,  $K_R$  阻力曲线减小,在  $\Delta a / (D - a_0)$  为0.6之后,随初始缝高比的增大,  $K_R$  阻力曲线增大。

将第3组的  $K_R$  阻力曲线的计算结果绘于图7中。从图7可知,试件高度对混凝土  $K_R$  阻力曲线有一定的影响,不同试件高度的  $K_R$  阻力曲线在  $\Delta a / (D - a_0)$  为0.4之前,随试件高度的增大,  $K_R$  阻力曲线增大,在  $\Delta a / (D - a_0)$  为0.6之后,随试件高度的增大,  $K_R$  阻力曲线减小。

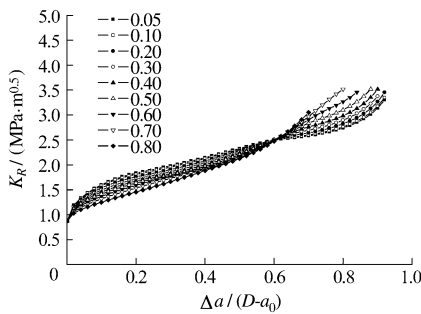


图6  $K_R$  阻力曲线随试件初始缝高比的变化

Fig. 6  $K_R$  curves for different initial crack length/depth ratios

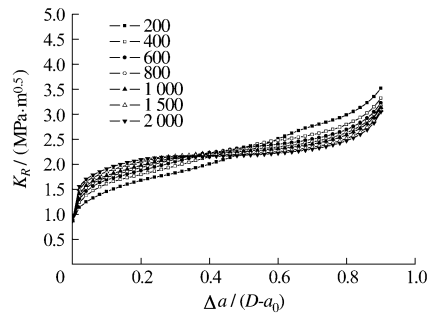


图7  $K_R$  阻力曲线随试件高度的变化

Fig. 7  $K_R$  curves for different depths

总结第2和第3组的计算结果,可得出一个结论:混凝土的  $K_R$  阻力曲线存在一定的尺寸效应。观察图6与图7,发现试件的韧带长度越长,其  $K_R$  阻力曲线越平缓。强度等级为C40,初始缝高比  $a_0$  为0.2,试件高度  $D$  为2 000 mm的混凝土试件的  $K_R$  阻力曲线如图8所示。从图8可知,当韧带长度足够长时,  $K_R$  阻力先增大,而后趋于稳定。

### 3.3 混凝土 FPZ(断裂过程区)长度的结果分析

断裂过程区(fracture process zone, 简称为FPZ)是裂缝扩展过程中宏观裂缝前端的微裂缝区,断裂过程区内分布着阻碍裂缝扩展的黏聚力,FPZ的存在是断裂能和断裂韧度等断裂参数具有尺寸效应和边界效应的主要原因。完整FPZ长度是指黏聚力  $\sigma$  从0所对应的位置到  $f_1$  所对应的位置之间的长度,FPZ长度的计算就是用有效裂缝长度  $a$  减去  $w_0$  所对应位置的裂缝长度,通过上述解析方法可以求得。

将3组试件的计算结果分别绘于图9中,可知:断裂过程区长度随着裂缝扩展而发生变化,先随着有效裂缝长度的增加而增加,当裂缝尖端张开位移为  $w_0$  时,达到完整断裂过程区长度,然后开始减小。由图9(a)可知,混凝土强度提高,最大完整断裂过程区长度减小,达到完整断裂过程区时的裂缝扩展长度与韧带

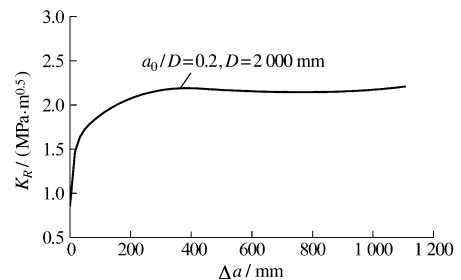


图8 韧带足够长时的  $K_R$  阻力曲线

Fig. 8  $K_R$  curve for infinite ligament length

长度的比值减小;由图9(b)可知,试件的初始缝高比增大,最大完整断裂过程区长度减小,达到最大完整断裂过程区时的裂缝扩展长度与韧带长度的比值增大;由图9(c)可知,随试件高度的增加,最大完整断裂过程区长度增大,达到最大完整断裂过程区时的裂缝扩展长度与韧带长度的比值减小。

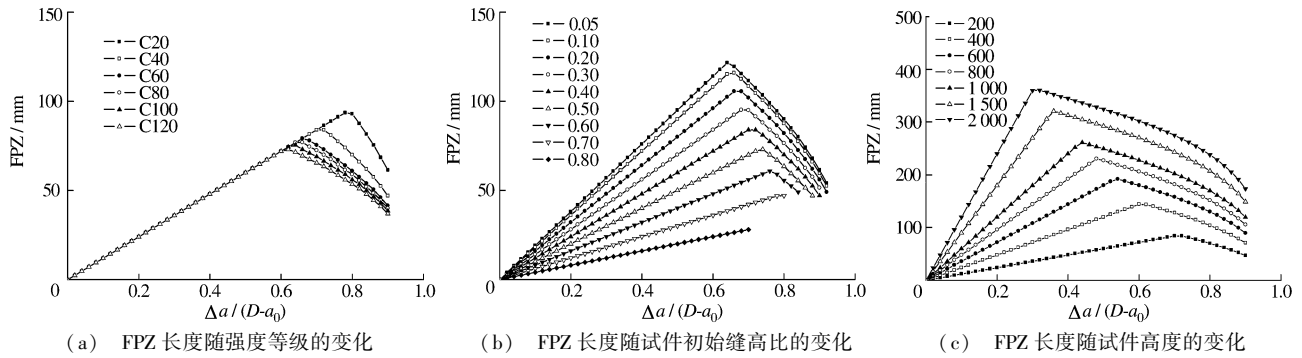
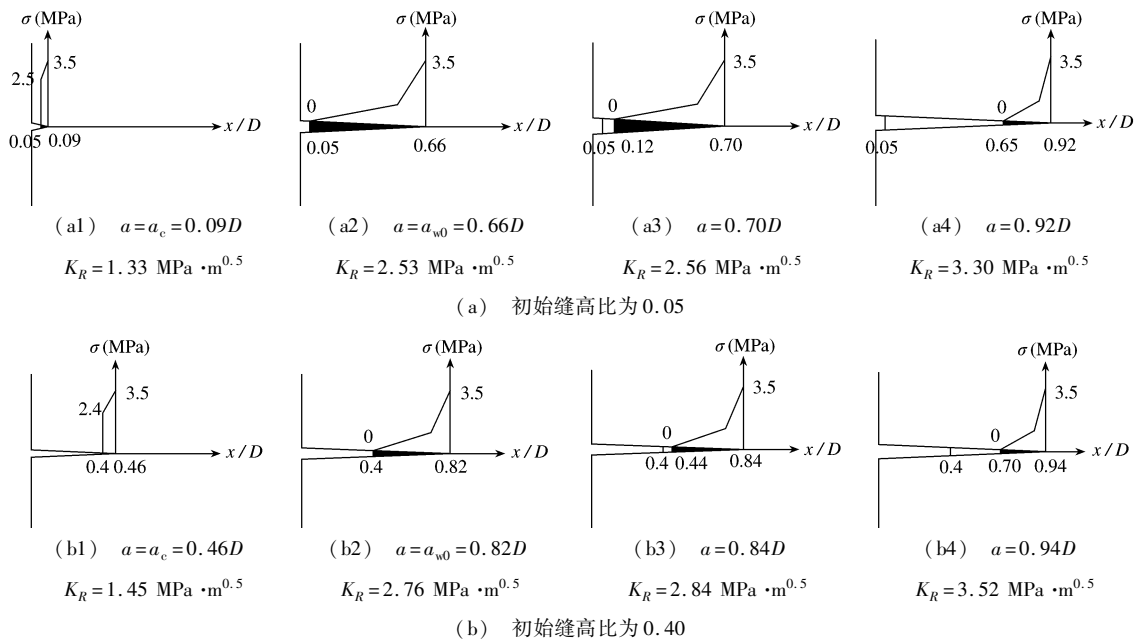


图9 FPZ长度随强度等级、试件初始缝高比及试件高度的变化

Fig. 9 FPZ lengths for different strength grades, different initial crack length/depth ratios and different depths

裂缝扩展至有效裂缝长度  $a$ ,会有其对应的FPZ长度与黏聚力分布,通过图2即可确定。选取第2组中初始缝高比为0.05,0.4,0.8的试件,分别绘制FPZ长度与黏聚力分布的变化(见图10)。图10(a)与图10(b)均分为4个阶段:第1阶段表示的是裂缝开始失稳扩展的时刻(图(a1)和(b1));第2阶段表示的是起始裂缝尖端的黏聚力减小至0的时刻(图(a2)和(b2)),即达到最大完整断裂过程区长度的时刻;第3阶段表示达到最大完整断裂过程区长度后,裂缝尖端不受力,黏聚力为0的点后移,FPZ长度开始减小的时刻(图(a3)和(b3));第4阶段表示的是裂缝扩展到接近试件边界处的时刻(图(a4)和(b4))。由于初始缝高比为0.8的试件,韧带长度过短,不能扩展至完整断裂过程区,因此只选取了3个阶段;图(c1)表示的是裂缝开始失稳扩展的时刻;图(c2)表示的是有效裂缝长度  $a$  扩展至  $0.92D$  的时刻;图(c3)表示的是裂缝扩展到接近试件边界处的时刻。



(b) 初始缝高比为0.40

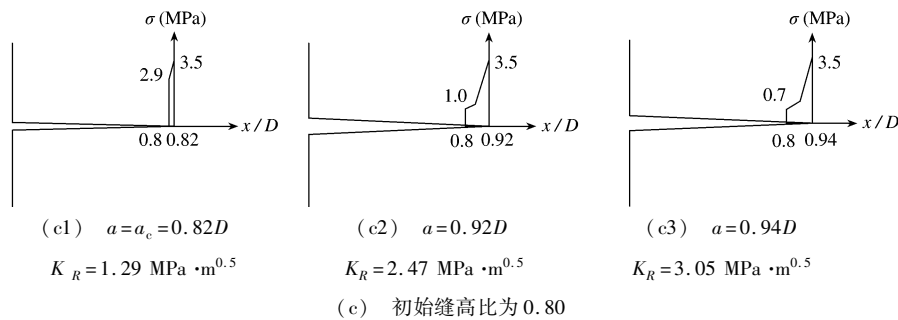


图10 不同初始缝高比试件的FPZ长度与黏聚力分布的变化

Fig. 10 Variation of FPZ length and cohesive stress distribution within the FPZ for specimen with different ratios of  $a_0/D$ 

## 4 结 语

本文基于裂缝扩展准则,提出了计算混凝土  $K_R$  阻力曲线的实用解析方法,采用这一方法,只需给出混凝土的起裂断裂韧度  $K_{Ic}^{ini}$ ,弹性模量  $E$ ,抗拉强度  $f_t$  和断裂能  $G_F$ ,便可计算混凝土的  $K_R$  阻力曲线。在此基础上,研究了强度等级为 C20 到 C120 的混凝土、强度相同初始缝高比不同以及初始缝高比相同而试件高度不同的混凝土  $K_R$  阻力曲线与断裂过程区长度,结果发现:

(1) 混凝土强度等级提高,  $K_R$  阻力曲线上升,但其上升幅值逐渐减小,强度等级达到 C60 以后,其上升幅值趋于稳定。

(2) 混凝土的  $K_R$  阻力曲线存在一定的尺寸效应。不同初始缝高比的  $K_R$  阻力曲线在  $\Delta a/(D - a_0)$  为 0.6 之前,随初始缝高比的增大,  $K_R$  阻力曲线减小,在  $\Delta a/(D - a_0)$  为 0.6 之后,随初始缝高比增大,  $K_R$  阻力曲线增大;不同试件高度的  $K_R$  阻力曲线在  $\Delta a/(D - a_0)$  为 0.4 之前,随试件高度的增大,  $K_R$  阻力曲线增大,在  $\Delta a/(D - a_0)$  为 0.6 之后,随试件高度的增大,  $K_R$  阻力曲线减小。

(3) 当初带长度足够长时,  $K_R$  阻力先增大,而后趋于一稳定值。

(4) 混凝土强度等级提高,最大完整断裂过程区长度减小,达到完整断裂过程区时的裂缝扩展长度与韧带长度的比值减小。

(5) 试件的初始缝高比增大,最大完整断裂过程区长度减小,达到最大完整断裂过程区时的裂缝扩展长度与韧带长度的比值增大;随试件高度的增加,最大完整断裂过程区长度增大,达到最大完整断裂过程区时的裂缝扩展长度与韧带长度的比值减小。

## 参 考 文 献:

- [1] ASTM-STP 527, Fracture toughness evaluation by R-Curve methods[S].
- [2] LENAIN J C, BUNSELL A R. The resistance to crack growth of asbestos cement[J]. Journal of Materials Science, 1979, 14(2): 321-332.
- [3] BAŽANT Z P, JIRASEK M. R-curve modeling of rate and size effects in quasibrittle fracture[J]. International Journal of Fracture, 1993, 62: 355-373.
- [4] REINHARDT H W, XU Shi-lang. Crack extension resistance based on the cohesive force in concrete[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1999, 64(5): 563-587.
- [5] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976, 6: 773-782.
- [6] 丁生根. 基于虚拟裂缝闭合力的混凝土双  $K$  断裂参数及  $K_R$  阻力曲线[D]. 大连: 大连理工大学, 2001. (DING Sheng-gen. Research on concrete's fracture double- $K$  parameters and the  $K_R$ -curve[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2001. (in Chinese))

- [7] 徐世焯, 吴智敏, 丁生根. 砼双  $K$  断裂参数的实用解析方法[J]. 工程力学, 2003, 20(3): 54-61. (XU Shi-lang, WU Zhi-min, DING Sheng-gen. A practical analytical approach to the determination of double- $K$  fracture parameter of concrete[J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(3): 54-61. (in Chinese))
- [8] KUMAR S, BARAI S V. Weight function approach for determining crack extension resistance based on the cohesive stress distribution in concrete[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2009, 76(8): 1131-1148.
- [9] 董伟, 何化南, 吴智敏, 等. 基于裂缝扩展准则的  $K_R$  阻力曲线研究[J]. 工程力学, 2011, 28(7): 13-19. (DONG Wei, HE Hua-nan, WU Zhi-min, et al. A study of  $K_R$ -curve based on crack propagation criterion in concrete[J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(7): 13-19. (in Chinese))
- [10] 吴智敏, 董伟. 混凝土 I 型裂缝扩展准则及裂缝扩展全过程的数值模拟[J]. 水利学报, 2007, 38(12): 1453-1459. (WU Zhi-min, DONG Wei. Mode I crack propagation criterion of concrete and numerical simulation of complete process of cracking[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, 38(12): 1453-1459. (in Chinese))
- [11] KUMAR S, BARAI S V. Influence of specimen geometry and size-effect on the  $K_R$ -curve based on the cohesive stress in concrete[J]. International Journal of Fracture, 2008, 152(2): 127-148.
- [12] XU F, WU Z M, ZHENG J J, et al. Crack extension resistance curve of concrete considering variation of FPZ length[J]. Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, 2011, 23(5): 703-710.
- [13] XU S, REINHARDT H W. Determination of double- $K$  criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture, Part II: Analytical evaluating and practical measuring methods for three-point bending notched beams[J]. International Journal of Fracture, 1999, 98(2): 151-177.
- [14] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. The stress analysis of cracks handbook[M]. ASME, 2000.
- [15] JENQ Y S, SHAH S P. A fracture toughness criterion for concrete[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1985, 21(5): 1055-1069.
- [16] PETERSSON P E. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials[R]. Report TVBM-1006. Sweden: Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, 1981.
- [17] CEB-FIP; Model Code 2010-First complete draft, Volume 1[S]. 2010.
- [18] XU S, REINHARDT H W. A simplified method for determining double- $K$  fracture parameters for three-point bending tests[J]. International Journal of Fracture, 2000, 104(2): 181-209.
- [19] XU S, REINHARDT H W. Determination of double- $K$  criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture, Part III: Compact tension specimens and wedge splitting specimens[J]. International Journal of Fracture, 1999, 98(2): 179-193.
- [20] KUMAR S, BARAI S V. Determining double- $K$  fracture parameters of concrete for compact tension and wedge splitting tests using weight function[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2009, 76(7): 935-948.
- [21] 荣华, 董伟, 吴智敏, 等. 大初始缝高比混凝土试件双  $K$  断裂参数的试验研究[J]. 工程力学, 2012, 29(1): 162-167. (RONG Hua, DONG Wei, WU Zhi-min, et al. Experimental investigation on double- $K$  fracture parameter for large initial crack-depth ratio in concrete[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(1): 162-167. (in Chinese))
- [22] 高淑玲, 王玲, 徐世焯. 高强混凝土双  $K$  断裂参数测试及计算方法[J]. 水利水电科技进展, 2010, 30(3): 28-31. (GAO Shu-ling, WANG Ling, XU Shi-lang. Tests and methods of double- $K$  fracture parameters for high strength concrete[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2010, 30(3): 28-31. (in Chinese))
- [23] 吴智敏, 徐世焯, 刘佳毅. 光弹贴片法研究混凝土裂缝扩展过程及双  $K$  断裂参数的尺寸效应[J]. 水利学报, 2001, (4): 34-39. (WU Zhi-min, XU Shi-lang, Liu Jia-yi. Study on crack propagation process of concrete and size effect of double- $K$  fracture parameter by means of photoelastic coatings[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001, (4): 34-39. (in Chinese))
- [24] 刘红梁, 宋罕宇. 高强混凝土立方体强度变异系数的商榷[J]. 哈尔滨商业大学学报: 自然科学版, 2004, 20(5): 604-607. (LIU Hong-liang, SONG Han-yu. Discuss on variation factor of high-strength concrete cube strength[J]. Journal of Harbin University of Commerce (Natural Science Edition), 2004, 20(5): 604-607. (in Chinese))



## A practical analytical approach to determine $K_R$ -curves of concrete

MO Zhuo-kai, DONG Wei, WU Zhi-min, QU Xiu-hua

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Based on the crack propagation criterion for the mode I crack, a practical analytical method is developed for determining the crack extension resistance curves of concrete. In this method, the crack extension resistance is composed of the initial fracture toughness  $K_{Ic}^{ini}$  and the resistance caused by the cohesive force, equaling the driving force of the crack extension. It is concluded that as long as the initial fracture toughness  $K_{Ic}^{ini}$ , the elastic modulus  $E$ , the tensile strength  $f_t$  and the fracture energy  $G_f$  of concrete are obtained, the  $K_R$  extension resistance curves can be calculated by using this method without testing the load-crack mouth opening displacement curves. Further, the practical analytical method is applied to calculate the  $K_R$  extension resistance curves, the fracture process zone lengths and the cohesive stress distribution for concrete with varied strength grades from C20 to C120, different initial crack length/depth ratios and different depths under the three-point bending conditions. Based on the numerical analysis results, it is found that the  $K_R$  extension resistance curves increase with the increase of the strength grades, but the growth amplitude decreases, and when the strength grades is larger than C60, the growth amplitude will tend to be stable; the  $K_R$  extension resistance curves are dependent of the initial crack length and specimen depth, and when the ligament is long enough, the crack extension resistance increases and then tends to be stable; the maximum lengths of the complete fracture process zone decrease with the increase of concrete strength grades; and the specimen size has remarkable impacts upon the fracture process zone length.

**Key words:** concrete;  $K_R$  extension resistance curve; fracture process zone (FPZ); crack; cohesive force; fracture toughness of concrete cracking