# 土体中间主应力确定及其对临界值影响

# 陈君平1,蔡行洲2,江 强1

(江阴市人民政府重点工程建设办公室, 江苏 江阴 214400; 2. 南京工业大学 交通学院, 江苏 南京 210009)

**摘要:**分析比较平面应变状态下中间主应力的各种形式,根据侧限压缩试验的特殊应力应变条件,推导了一个与土性参数有关的中间主应力表达式.该表达式可简单地通过三轴压缩试验所得的参数来确定,同时还可以简单反映土体应力历史对土体强度的影响.将该表达式与 SMP 准则和 Lade 准则结合,建立了平面应变状态下土性参数与三轴压缩状态土性参数的关系,通过试验数据的分析比较看出,所得的中间主应力能更好地反映土体的实际性状,对于 SMP 准则和 Lade 准则均有很好的适用性.

**关 键 词:** 平面应变; 中间主应力; 临界状态; 土性参数; SMP 准则; Lade 准则 中图分类号: TU431 **文献标志码:** A **文章编号:** 1009-640X(2013)05-0089-06

众多理论和实践证明,岩土材料具有中间主应力效应,中间主应力对岩土工程的计算分析是有影响的, 并且应力偏平面上存在奇异性,考虑中间主应力能提高其强度<sup>[1-4]</sup>. Mohr-Coulomb 准则因简单而受到广泛运 用,但其最大的缺陷就是没有考虑中间主应力  $\sigma_2$  的影响,从而使得 Mohr-Coulomb 准则在土工弹塑性数值分 析中造成一定的困难. 随着强度理论的发展,众多学者提出了考虑中间主应力的破坏准则<sup>[5-8]</sup>,其中, Matsuoka 和 Nakai 提出的 SMP 准则和 Lade 提出的 Lade 准则,不仅形式简单易于理解,且很好地解决了上述 问题.

岩土工程中经常遇见在平面应变条件下分析土体强度和变形,如条形基础、挡土墙、大坝等.而目前在工程分析中,大多数仍采用常规三轴压缩试验得出的抗剪强度参数内摩擦角和黏聚力来分析平面应变问题,有关实验和理论证明平面应变状态下采用的三轴试验所得的抗剪强度参数是不一致的,偏于保守.同时,对于土体平面应变这个特殊的应力状态,平面应变方向上的应力只有当土体接近破坏状态时才是中间主应力<sup>[9]</sup>,这与人们的一般认识不一致;其中间主应力的大小目前还是通过一定经验和假设加以处理,对于复杂的岩土类材料还未能得到很好的解答.因此,如何确立一个合理的中间主应力形式,建立起平面应变状态和常规三轴压缩状态土的强度参数之间的关系具有重要意义.

本文在前人对平面状态下中间主应力的研究基础上,根据土的平面应变临界状态条件与侧限压缩试验 即固结试验特殊的应力应变关系,分别以摩擦类非黏性土与非完全摩擦类黏性土为研究对象,对俞茂宏<sup>[5]</sup> 提出的平面应变状态下的中间主应力表达式进行改进,由于对侧压力系数 K<sub>0</sub> 在正常固结状态与非正常固结 状态的公式描述不同,导致得到的参数变量 m 表达式不同,因此改进后的表达式能够反映土体的应力历史 对中间主应力及土体强度的影响.除此之外,此中间主应力表达式与土性参数有关,能够适用不同的破坏准 则;通过 SMP 破坏准则和 Lade 破坏准则建立起平面应变条件和常规三轴压缩条件下的强度参数之间的关 系,并与实测数据进行了分析比较,验证本文的研究成果.

收稿日期: 2013-03-06

作者简介:陈君平(1967-),男,江苏江阴人,高级工程师,主要从事市政工程、建筑工程等城市建设工作. E-mail: hellojq@163.com

土体的强度和变形不仅与其所受的应力状态密切相关,而且与土体本身的材料特性有关.平面应变状态 只对应明确的应变条件,却不对应明确的应力条件,中间主应力 $\sigma_2$ 的确定较为困难,如何简单、合理地确定 中间主应力 $\sigma_2$ ,成为对土体进行强度和变形分析的基础.有人简单地将土体假定为弹性体,满足 Hook 定律 而得到平面应变状态条件下的 $\sigma_2$ 形式: $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$ ,其中 $\nu$ 为泊松比.对岩土材料 $\nu$ 值的确定本身就较 为困难,土体是十分复杂的弹塑性材料,简单地假定土体符合 Hook 定律本身就存在很大缺陷.另一种处理 方法就是简单地取:

$$\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \tag{1}$$

该表达式根据相关联流动法则和 Mises 准则推导得出,直接用于岩土材料是不合适的. M. Satake<sup>[10]</sup>根据相关联流动法则和 SMP 准则得出了平面应变条件下的应力条件:

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} \tag{2}$$

但对复杂的岩土材料,简单地视中间主应力 $\sigma_2$ 为应力状态的函数,而与材料本身性质无关,显然是不合理的;同时该表达式是建立在 SMP 准则的基础上,对于其他准则并不一定能得到合理的运用.

俞茂宏等<sup>[5]</sup>在描述平面应变条件下为克服上述问题引入一个中间主应力参数 m,令

$$\sigma_2 = \frac{m}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \tag{3}$$

式中: $0 < m \le 1$ ,称为中间主应力参数,通过理论和试验来确定.根据经验,在弹性区,可取  $m = \nu(\nu$  为柏松比); 在塑性区,可取  $m \rightarrow 1$ .从式(3)可见该表达式在一定意义上体现了平面应变条件下  $\sigma_2$  与其所受应力状态和 材料本身性质有关,但却未给出体现材料性质参数的具体表达式,相当于 m 还是待定的反映材料本身特性 的参数.

对于摩擦类无黏性土,其一般三维应力状态下的应力圆 如图 1 所示,其中  $OP_2 = \sigma_2, OO' = (\sigma_1 + \sigma_3)/2,$ 所以, $m = OP_2/OO',$ 即式(3)中 m的几何意义表示在莫尔应力圆上中 间主应力  $\sigma_2$ 与大莫尔圆圆心 O'的相对位置, $P_2$ 的极限位置 是与  $P_3$ 或  $P_1$  重合,所以有关系式:

$$m_{\min} = \frac{OP_3}{OO'} = \frac{OO' - O'P_3}{OO'} = 1 - \sin\varphi_{\rm tc}$$
(4)  
$$m_{\max} = \frac{OP_1}{OO'} = \frac{OO' + O'P_1}{OO'} = 1 + \sin\varphi_{\rm tc}$$
(5)



式中:φ<sub>w</sub>为三轴压缩或拉伸的临界内摩擦角.由此可知,m的范围是:

$$1 - \sin\varphi_{\rm tc} \le m \le 1 + \sin\varphi_{\rm tc} \tag{6}$$

通常用中间主应力参数 b 来表示中间主应力  $\sigma_2$  和大小主应力之间的关系:

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (0 \le b \le 1) \tag{7}$$

如图 1 所示,  $P_3P_2 = \sigma_2 - \sigma_3$ ,  $P_3P_1 = \sigma_1 - \sigma_3$ , 所以,  $b = \frac{P_3P_2}{P_3P_1}$ , 即 b 表示  $P_2$  在  $P_3$  与  $P_1$  之间的位置, 几何意义为小莫尔圆(两小莫尔圆的半径之和等于大莫尔圆的半径) 半径与大莫尔圆半径之比. 由此可以看出参数 b, m 是等效的, 它们都反映了中间主应力  $\sigma_2$  从  $\sigma_2 = \sigma_3$  增加到  $\sigma_2 = \sigma_1$  过程中应力状态的变化情况, 均易于描述任意应力状态. 所以式(3)可以表示摩擦类无黏性土的中间主应力.

平面应变条件是特殊的三维应力状态,当土体接近破坏时,平面应变方向才是中间主应力 $\sigma_2$ ,其应变条件为:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^p = 0 \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_2^p = 0 \end{array} \right\}$$

$$(8)$$

其中:  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2^e$ ,  $\varepsilon_2^e$ , 分别为平面应变方向上的总应变、弹性应变和塑性应变; d $\varepsilon_2$ , d $\varepsilon_2^e$ , d $\varepsilon_2^e$ , d $\varepsilon_2^e$ , 为其增量.

对于地基在自重作用下的应力状态或者侧限压缩试验即固结试验的应力状态其侧应变为零,是特殊的 平面应变状态,其水平方向上的应力和应变关系为:

$$\left. \begin{array}{c} \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 0 \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(9)$$

$$\left. \begin{array}{c} \sigma_3 = \sigma_2 \\ \sigma_3 = \sigma_2 = K_0 \sigma_1 \end{array} \right\}$$

$$(10)$$

其中:K<sub>0</sub> 为侧压力系数.

由式(3),(9) 和(10) 可得: m = 2K<sub>0</sub>/(1 + K<sub>0</sub>) 所以,平面应变条件下的应力参量 m 与侧压力系数 K<sub>0</sub> 有关.

对于非完全摩擦类黏性土,强度破坏线一般不通过原 点,可以通过引入黏结应力 $\sigma_0^{[12-13]}$ ,即强度破坏线总通过一 个公共点(黏结应力点 $\sigma_0$ ),其中 $\sigma_0 = c/\tan\varphi, c, \varphi$ 为土体的 黏聚力和内摩擦角,可由三轴压缩的临界内摩擦角和黏聚力  $c_{te}, \varphi_{te}$ 确定.非完全摩擦类黏性土的应力圆如图 2 所示.则在 平面应变条件下的黏性土中间主应力 $\sigma_2$ 为:

$$\sigma_2 = \frac{m}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + (m - 1)\sigma_0$$
(12)

对于正常固结土, Jaky 得出理论关系<sup>[11]</sup>:

$$K_0 = K_{\text{onc}} = \left(1 + \frac{2}{3} \sin\varphi\right) \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)$$

将式(13)代入式(12)得:

$$m = \frac{3 - \sin\varphi - 2\sin\varphi}{3 + \sin\varphi - 2\sin^2\varphi}$$

 $2 \sin^2 \alpha$ 

式中: $\varphi$ 取三轴压缩试验中临界状态下所测值  $\varphi_{te}$ ; $K_{one}$ 为正常固 结土的侧压力系数.式(14)确定了 m 为材料性质的函数.m 随 材料内摩擦角变化的关系如图 3 所示,可见,m 随  $\varphi$  的增大而减 小,即在平面应变条件下其范围为0<m<1.当 $\varphi$ =0 时,材料为无 黏性的流体,m=1 反映了流体等值传递压力的特点;当 $\varphi$ =90° 时,材料为刚体,m=0,即 $\sigma_2$ =0 反映了刚体不变形的特性.

对于非正常固结土  $K_0$  可由下式确定:

$$K_0 = OCR^n K_{onc}$$
(15) Fig. 3

式中:OCR 为超固结比,OCR=1.0 为正常固结土,OCR>1.0 为 超固结土,OCR<1.0 为欠固结土;n 为一常数.







$$\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right) \tag{13}$$

91

(11)



inner friction  $\varphi_{te}$  in triaxial compression

### 2 强度准则

著名的 SMP 破坏准则和 Lade 破坏准则考虑中间主应力 效应,且在应力偏平面上不存在奇异性,合理地描述三维应 力状态无黏性土的强度特性.在  $\pi$  平面上,SMP 准则破坏曲 线光滑地外接 Mohr-Coulomb 破坏曲线的 6 个点(3 个压缩试 验点和 3 个拉伸试验点),Lade 准则破坏曲线光滑地外接 Mohr-Coulomb 破坏曲线的 3 个点(3 个压缩试验点),如图 4 所示.为了将上述两个准则推广应用于非摩擦材料的黏性 土,H. Matsuoka 等<sup>[12]</sup>和 R. Ewy(1999)<sup>[13]</sup>通过引入黏结应力  $\sigma_0$ 进行了修正,分别将 SMP 准则和 Lade 准则扩展,使其可 以合理描述黏性土的强度特性.



图 4 Mohr-Coulomb 和 SMP/Lade 准则在 π 平面上的破坏面

Fig. 4 Mohr-Coulomb and SMP /Lade failure surfaces on  $\pi$ -plane

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} = K_{\rm SMP} = 8\tan^2\varphi + 9 \tag{16}$$

Lade 破坏准则可表示为<sup>[7]</sup>:

SMP 破坏准则可表示为<sup>[6]</sup>.

$$\frac{I_{1}^{2}}{I_{3}} = K_{\text{Lade}} = \frac{(3 - \sin\varphi)^{3}}{(1 + \sin\varphi)(1 - \sin\varphi)^{2}}$$
(17)

式中: $I_1$ , $I_2$ , $I_3$ 分别为应力的1次、2次、3次不变量;K为材料常数; $\varphi$ 为土三轴压缩的临界内摩擦角 $\varphi_{tc}$ . 将式(3)分别代人式(16),(17)可以得到基于 SMP 准则和 Lade 准则无黏性土的平面应变破坏公式:

$$R_{\rm ps-SMP} = \sqrt{\left[\frac{(m+1)(m+2) - mK_{\rm SMP-2}}{m(m+2)}\right]^2 - 1} - \frac{(m+1)(m+2) - mK_{\rm SMP}}{m(m+2)}$$
(18)

$$R_{\rm ps-Lade} = \sqrt{\left[1 - \frac{2mK_{\rm Lade}}{(m+2)^3}\right]^2 - 1} - 1 + \frac{2mK_{\rm Lade}}{(m+2)^3}$$
(19)

式中:R<sub>us</sub>是平面应变条件下破坏时的最大最小主应力比.

黏性土在平面应变状态下的破坏公式为:

$$\sigma_I - R_{\rm ps}\sigma_3 = (R_{\rm ps} - 1)\sigma_0 \tag{20}$$

则平面应变状态下的临界内摩擦角  $\varphi_{ps}$ 可以表示为:  $\varphi_{ps} = \sin^{-1}(R_{ps} - 1)/(R_{ps} + 1)$  (21) 黏性土在平面应变状态下破坏准则的 Coulomb 形式可以写成下列形式:

$$\tau = c_{\rm ps} + \sigma \tan \varphi_{\rm ps} = \beta_{\rm ps} c_{\rm tc} + \sigma \tan \varphi_{\rm ps} \tag{22}$$

式中: $\beta_{ps}$ 为黏结力的放大系数,表示平面应变条件和三轴应力条件下的临界黏聚力比,即 $\beta_{ps} = c_{ps}/c_{tc} = (R_{ps} - 1)/(w\sqrt{R_{ps}} \tan \varphi_{tc})$ .

至此,通过三轴压缩试验得出强度参数  $\varphi_{te}$ 和  $c_{te}$ ,即可以定出平面应变条件下破坏时的中间主应力,结合相应的破坏准则即可以得出平面应变条件下的强度参数  $\varphi_{ts}$ 和  $c_{ts}$ .

### 3 试验验证和比较

为了验证本文确定中间主应力表达式合理性,由不同形式的中间主应力结合 SMP 和 Lade 破坏准则预测出平面应变条件下临界内摩擦角,图5(a)和(b)为文献[14-20]的试验数据和 SMP 及 Lade 破坏准则预测线所得的比较结果,图5(c)和(d)为文献[21]正常固结黏土的试验数据和 SMP 及 Lade 破坏准则预测线所得的比较结果.本文的比较均认为土体为正常固结土,且不考虑土体破坏时剪胀对摩擦角的影响.由比较结果可见,本文推导提出的中间主应力表达式与两个破坏准则预测的  $\varphi_{ps}$ 均能和试验数据很好地吻合,而由式(1)和(2)结合两个准则所得的结果与实测数据都有一定的偏差,尤其 Lade 破坏准则所得的结果偏离实测数据较大,若采用了不合理的中间主应力表达式将会过高估计土体的强度,同时可以看出 SMP 准则比 Lade 准则对于土体具有更好的适用性.



#### Fig. 5 Comparison between the predicted and tested results

#### 4 结 语

本文通过分析比较平面应变条件下中间主应力,根据侧限压缩特殊的应力应变条件,从理论上推导确定 出一个与土性参数有关的中间主应力线性表达式,该表达式中的土性参数可以通过简单的三轴压缩试验确 定,并且可以相应地考虑土体应力历史对中间主应力的影响.同时确定出基于 SMP 和 Lade 破坏准则的平面 应变条件下土性参数与三轴压缩条件下土性参数之间的关系.通过与试验数据的对比分析,得出本文推导确 定的中间主应力表达式比其他形式的中间主应力形式更能反映土体的实际性状,对于不同的破坏准则均具 有很好的适用性,若采用不合理的中间主应力表达式很有可能会过高估算土体的强度.

#### 参考文献:

- [1] BISHOP A W. The strength of soils as engineering materials [J]. Geotechnique, 1966, 16(2): 91-130.
- [2] GREEN G E, BISHOP A W. A note on the drained strength of sand under generalized strain conditions [J]. Geotechnique, 1969, 19(1): 144-149.
- [3] SHIBATA T, KARUBE D. Influence of the variation of the intermediate principal stress on the mechanical properties of normally consolidated clays[C] // Proc of Sixth ICSMFE, 1965: 359-361.
- [4] LADE P V, DUNCAN J M. Cubical triaxial tests on cohesionless soil [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, ASCE, 1973, 99(SM10): 793-812.
- [5] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京:科学出版社, 1998. (YU Mao-hong. Twin shear theory and its applications[M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese))
- [6] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses (Discussion) [C] // Proc of Japan Society of Civil Engineers, 1974, 232: 59-70.
- [7] LADE P V, DUNCAN J M. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1975, 101(10): 1037-1053.

- [8] YAO Yang-ping, LU De-chun, ZHOU An-nan, et al. The generalized non-linear strength theory and transformed stress space [J]. Science in China(SerE: Engineering & Materials Science), 2004,47(6): 691-709.
- [9] 李广信,黄永男,张其光. 土体平面应变方向上的主应力[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(3): 358-361. (LI Guang-xin, HUANG Yong-nan, ZHANG Qi-guang. The principal stress of soil in the direction of plane strain [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(3): 358-361. (in Chinese))
- [10] SATAKE M. Stress deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses(Discussion) [C] // Proc of Japan Society of Civil Engineers, 1976, 246: 137-138.
- [11] WROTH C P, HOUBLY G T. Soil mechanics-property characterization and analysis problem procedures [C] // Proc 11<sup>th</sup> Int Conf Soil Mech and Found Engrg, ISSMFE, San Francisco, Calif, 1985, 1, 1-55.
- [12] MATSUOKA H, HOSHIKAWA T, UENO K. A general failure criterion and stress-strain retain for granular materials to metals [J]. Soil and Foundations, 1990, 30(2): 119-127.
- [13] EWY R. Wellbore-stability prediction by use of a modified Lade criterion [J]. SPE Drill Completion, 1999, 14(2): 85-91.
- [14] CORNFORTH D H. Some experiments on the influence of strain conditions on the shear strength of sand[J]. Geotechnique, 1964, 14(2): 143-67.
- [15] LEUSSINK H, WITTKE W, WESELOH K. Unterschiede im Scherverhalten rolliger Erdstoffe und Kugelschüttungen im Dreiaxial und Biaxialversuch. New York: Institut f. Bodenmechanik u. Felsmechanik d. Technischen Hochschule Fridericiana, 1966.
- [16] ROWE P W. The relationship between the shear strength of sands in triaxial compression, plane strain and direct shear [J]. Geotechnique, 1969, 19(1): 75-86.
- [17] GREEN G E, READES D W. Boundary condition anisotropy and sample shape effects on the stress-strain behaviour of sand in triaxial compression and plane strain[J]. Geotechnique, 1975, 25(2): 333-356.
- [18] LAM W K, TATSUOKA F. Effects of initial anisotropic fabric and on strength and deformation characteristic of sand[J]. Soils Foundations, 1988, 28(1): 89-106.
- [19] SCHANZ T, VERMEER P A. Angles of friction and dilatancy of sand[J]. Geotechnique, 1996, 46(1): 75-86.
- [20] RAMAMURTHY T, TOKHI V K. Relation of triaxial and plane strain strengths [C] // Proc of 10<sup>th</sup> Int Conf on Soil Mech and Found Eng, Stockholm, 1981: 755-758.
- [21] 李广信. 高等土力学[M]. 北京:清华大学出版社, 2004:135. (LI Guang-xin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004:135. (in Chinese))

# Determination of intermediate principal stress of soil mass and its influence on critical values under plane strain conditions

CHEN Jun-ping<sup>1</sup>, CAI Xing-zhou<sup>2</sup>, JIANG Qiang<sup>1</sup>

(1. Jiangyin People's Government Key Project Construction Office, Jiangyin 214400, China; 2. College of Transprotation Science and Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: Through analysing and comparing kinds of the intermediate principal stress forms under plane strain conditions and based on the particular conditions of stress-strain in oedometric experiments, an expression of the intermediate principal stress that is related with parameters of soil properties is deduced and confirmed. The expression is simply confirmed by parameters gained by triaxial compression experiments, and it can also simplly reflect the influence of soil mass stress history on soil strength. By combining SMP criterion and Lade criterion with the expression of the intermediate principal stress, the relationship of parameters of soil properties is established between plane strain state and triaxial compression state. Analysis and comparison of the experiment data show that the intermediate principal stress proposed herein well reflects the practical behavior of the soils mass and is very suitable for SMP criterion and Lade criterion.

Key words: plane strain; intermediate principal stress; critical state; parameters of soil mass properties; SMP criterion; Lade criterion