

含有紊动黏性项浅水方程的数值求解

何 杰^{1,2}, 辛文杰^{1,2}

(1. 南京水利科学研究院, 江苏 南京 210029; 2. 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210029)

摘要: 紊动黏性项对水流方程数值求解的稳定性至关重要. 采用基于无结构网格的有限体积法对方程进行离散, 对流项的界面通量采用 Roe 格式的近似 Riemann 解计算, 紊动黏性项采用单元交界面的平均值估算, 底坡源项则采用特征分解法处理. 应用该模式模拟了圆柱绕流, 模拟结果与实际情形较相符. 对港珠澳大桥的海中人工岛水域的潮流运动进行了有效模拟, 结果表明该模式能够较好地模拟出水建筑物附近水域复杂的水流结构.

关 键 词: 紊动黏性项; 浅水方程; 有限体积法; 无结构网格; 人工岛

中图分类号: TV131.4

文献标志码: A

文章编号: 1009-640X(2010)03-0095-06

计算浅水动力学在数值离散方法上先后经历了有限差分法、有限元法和有限体积法等. 有限体积法是一种结合有限单元法改进的有限差分法, 通过对每一个控制体积分可以严格满足物理量守恒. 在基于无结构网格的有限体积法方面, 浅水方程的数值求解研究经历了从一维、二维到三维的过程, 其中单元间的界面通量计算成为浅水方程求解的重点. 采用数值方法模拟实际水流运动时, 尤其是河口海岸地区大范围的水体运动, 往往忽略紊动黏性项在浅水方程中的作用. 这主要是因为模拟大水体运动过程中, 计算网格较粗, 浅水方程中的对流项占主要作用, 有无紊动黏性项模拟计算结果的差别很小. 但对于小范围的水体, 如模拟出水建筑物(尺寸以米计)周围的水体运动时, 紊动黏性项在水流方程中所起的作用将会突显出来. 因此, 在模拟尺寸较小建筑物周围水体的运动时, 需考虑有紊动黏性项时浅水方程的数值求解.

基于无结构网格离散计算区域、采用有限体积法求解浅水方程的过程中, 数值通量的计算非常重要^[1]. 数值通量的求解方法有多种, 如 Roe 格式的近似 Riemann 解^[2]、HLL 格式^[3]及算术平均等格式. 浅水方程中的源项处理也很关键, 若简单处理则可产生多变地形下静水虚假流动现象^[4], 较常见的做法是参照对流项特征向量的分解形式对源项进行分裂^[5]. 紊动黏性项中含有偏微分二次项, 对计算单元积分后将面积分转化为沿单元边界的线积分后仍含有一次微分项, 这是紊动黏性项在浅水方程求解过程中不易处理的主要原因之一. 本文采用单元交界面的平均值计算该界面紊动黏性项的数值通量, 对于微分项则采用类似有限元的方法处理, 从而实现带有紊动黏性项的浅水方程的数值求解. 耿艳芬^[6]等采用不考虑紊动黏性项的浅水方程对桥墩等出水建筑物进行了水流模拟. 本文将采用类似的计算方法结合考虑浅水方程的紊动黏性项计算模拟出水建筑物附近的水流形态.

1 控制方程

在平面尺度远大于垂直尺度情况下, 可用平面二维浅水方程描述计算水域的水流运动. 考虑到水流紊动因素的影响, 水流控制方程可表示为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla E = S + \nabla E^d \quad (1)$$

收稿日期: 2009-10-09

基金项目: 水利部科技创新项目(SCX2003-03)

作者简介: 何 杰(1979-), 男, 河南焦作人, 工程师, 博士, 主要从事河口海岸工程数值模拟研究. E-mail: jhe@nhri.cn

$$U = (d, du, dv)^T, E = (F, G),$$

$$F = \begin{pmatrix} du \\ du^2 + gh^2/2 \\ duv \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} dv \\ duv \\ dv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中:全水深 $d = h + \eta$, h 为水平面以下水深, η 为水面波动(见图 1); u, v 分别表示 x, y 方向的流速。

水流运动方程的紊动扩散项表示为:

$$E^d = (F^d, G^d), F^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_x d \partial u / \partial x \\ \varepsilon_y d \partial v / \partial y \end{pmatrix}, G^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_y d \partial u / \partial x \\ \varepsilon_x d \partial v / \partial y \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中: $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 分别为 x, y 方向的水流涡黏系数, 这里取各向同性, 即 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$, $\varepsilon = kdU_*$, U_* 为摩阻流速, 表示为 $U_* = \frac{n\sqrt{g(u^2 + v^2)}}{d^{1/6}}$ 。

$$\text{源项 } S \text{ 表示为: } S = S_0 + S_f = \begin{pmatrix} 0 \\ gd(S_{0x} + S_{fx}) + fv \\ gd(S_{0y} + S_{fy}) - fu \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中: S_{0x}, S_{0y} 分别是 x, y 方向的倾斜效应项即河床底部高程变化, $S_{0x} = -\partial z_b / \partial x$, $S_{0y} = -\partial z_b / \partial y$, z_b 为河床底部高程; S_{fx}, S_{fy} 则是 x, y 方向的底摩擦效应项, $S_{fx} = -\frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{d^{4/3}}$, $S_{fy} = -\frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{d^{4/3}}$, n 为曼宁系数; f 为柯氏系数, $f = 2\omega \sin \Phi$, ω 为地转速度, Φ 为当地地理纬度。

2 数值求解

为便于计算, 统一采用三角形单元对计算区域进行离散, 并将单一的网格单元作为控制元, 物理变量配置在每个单元的中心。对式(1)在计算域内积分, 利用 Green 公式将面积分化为线积分, 可得: $\frac{\partial U}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (E \cdot n) dl = \int_{\Omega} S d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (E^d \cdot n) dl$, 对第 i 个单元积分, 结果可表示为: $\frac{\partial U_i}{\partial t} A_i + \oint_{\partial\Omega_i} (E \cdot n - E^d \cdot n) dl = \int_{\Omega_i} S d\Omega_i$, A_i 为第 i 个单元面积, l 为三角形边长, 对应三角形有 $\oint_{\partial\Omega_i} (E \cdot n - E^d \cdot n) dl = \sum_{k=1}^3 (E_k \cdot n_k - E_k^d \cdot n_k) l_k$ 。

2.1 对流项数值通量计算

求解三角单元某边(如图 2 中单元 i 和 j 的交界边 l , R 和 L 分别表示边 l 两侧)通过的对流项数值通量可采用 Roe 格式的近似 Riemann 解, 计算形式如下^[7]:

$$E \cdot n = \frac{1}{2} [(E \cdot n)_R + (E \cdot n)_L - \Delta E^*] \quad (5)$$

$(E \cdot n)_R$ 和 $(E \cdot n)_L$ 分别为交界边两侧数值通量, ΔE^* 为两侧通量的修正值, 表示为:

$$\Delta E^* = \sum_{k=1}^3 \alpha_k |\lambda_k| e_k \quad (6)$$

式中: λ_k 和 e_k ($k=1, 2, 3$) 分别为对流项特征矩阵 A 的特征值和特征向量, 满足 $\Delta E = A \Delta U$ 。矩阵形式如下:

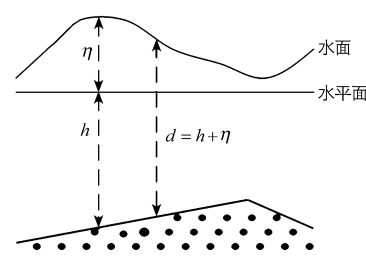


图 1 水深相关量

Fig. 1 Related physical factors about depth

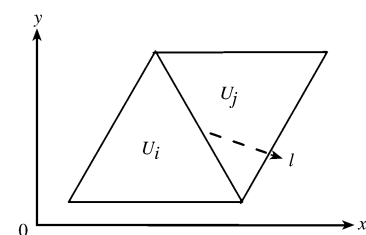


图 2 左右单元关系

Fig. 2 Relation between left element and right element

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (\bar{c}^2 - \bar{u}^2)n_x - \bar{u}\bar{v}n_y & 2\bar{u}n_x + \bar{v}n_y & \bar{u}n_y \\ -\bar{u}\bar{v}n_x + (\bar{c}^2 - \bar{v}^2)n_y & \bar{v}n_x & \bar{u}n_x + 2\bar{v}n_y \end{bmatrix}$$

矩阵中的 $\bar{u}, \bar{v}$ 和 $\bar{c}$ 采用质量加权平均计算,表达如下:

$$\bar{u} = \frac{u_R \sqrt{d_R} + u_L \sqrt{d_L}}{\sqrt{d_R} + \sqrt{d_L}}, \bar{v} = \frac{v_R \sqrt{d_R} + v_L \sqrt{d_L}}{\sqrt{d_R} + \sqrt{d_L}}, \bar{c} = \sqrt{\frac{g(d_R + d_L)}{2}}$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \bar{u}n_x + \bar{v}n_y + \bar{c}$, $\lambda_2 = \bar{u}n_x + \bar{v}n_y$, $\lambda_3 = \bar{u}n_x + \bar{v}n_y - \bar{c}$. 对应的特征向量为: $e_1 = (1, \bar{u} + \bar{c}n_x, \bar{v} + \bar{c}n_y)^T$, $e_2 = (0, -\bar{c}n_y, \bar{c}n_x)^T$, $e_3 = (1, \bar{u} - \bar{c}n_x, \bar{v} - \bar{c}n_y)^T$. 各项相应系数分别为: $\alpha_{1,3} = \frac{\Delta d}{2} \pm \frac{1}{2\bar{c}}[\Delta(du)n_x + \Delta(dv)n_y - (\bar{u}n_x + \bar{v}n_y)\Delta d]$, $\alpha_2 = \frac{1}{\bar{c}}([\Delta(dv) - \bar{v}\Delta d]n_x - [\Delta(du) - \bar{u}\Delta d]n_y)$, $(\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L)$

2.2 紊动项数值通量计算

对于含有二次偏导数的紊动项采用界面平均值进行计算,这样有利于简化处理方式、提高计算效率和保持计算精度^[8].

$$\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}[(\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{n})_R + (\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{n})_L] \quad (7)$$

$$\mathbf{E}^d \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{n}_x + \mathbf{G}^d \cdot \mathbf{n}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_x d \partial u / \partial x \\ \varepsilon_x d \partial v / \partial x \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_y d \partial u / \partial y \\ \varepsilon_y d \partial v / \partial y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_y \quad (8)$$

对于上式中的偏导数可用如下方式求解:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{A_i} \int_A \frac{\partial c}{\partial x} dA \approx \frac{c_1 \Delta y_1 + c_2 \Delta y_2 + c_3 \Delta y_3}{A_i}$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_i = \frac{1}{A_i} \int_A \frac{\partial c}{\partial y} dA \approx \frac{c_1 \Delta y_1 + c_2 \Delta y_2 + c_3 \Delta y_3}{A_i}$$

其中: $\Delta y_1 = y_3 - y_2$, $\Delta x_1 = x_3 - x_2$, $c_1 = (c_1^L + c_1^R)/2$;

$\Delta y_2 = y_1 - y_3$, $\Delta x_2 = x_1 - x_3$, $c_2 = (c_2^L + c_2^R)/2$;

$\Delta y_3 = y_2 - y_1$, $\Delta x_3 = x_2 - x_1$, $c_3 = (c_3^L + c_3^R)/2$.

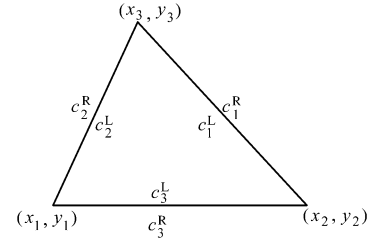


图3 计算单元物理量关系

Fig. 3 Physical relation among computed elements

黏性项计算格式:

$$\left(\varepsilon d \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \varepsilon d_i \frac{u_1 \Delta y_1 + u_2 \Delta y_2 + u_3 \Delta y_3}{A_i} \quad (9)$$

2.3 源项计算

源项可分解为底坡项和阻力项,即 $S = S_0 + S_f$. 阻力项 $S_f = (0, -gdS_{fx}, -gdS_{fy})^T$, 该项可直接求解. 若同时考虑出水建筑物壁面的摩擦阻力^[9], 模型中将位于壁面处单元的摩阻项变为:

$$S_{fx} = -gdu\sqrt{u^2 + v^2} \left(\frac{n_b^{3/2}}{d} + \frac{n_w^{3/2} l_k}{A_i} \right)^{4/3} \quad (10)$$

$$S_{fy} = -gdv\sqrt{u^2 + v^2} \left(\frac{n_b^{3/2}}{d} + \frac{n_w^{3/2} l_k}{A_i} \right)^{4/3} \quad (11)$$

式中: n_b, n_w 分别为河床底部和边壁侧面的糙率; A_i 为第 i 个单元的面积; l_k 为第 k 条边的长度, 该边标志为固体边界.

底坡项 $S_0 = (0, ghS_{0x}, ghS_{0y})^T$. 为保持求解格式的平衡性, 采用类似对流项矩阵特征向量分解形式分裂

底坡项: $S_0 = \sum_{k=1}^3 \beta_k e_k$, 其中 $\beta_1 = \frac{1}{2} \bar{c} \Delta h$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = -\frac{1}{2} \bar{c} \Delta h$. 对其采用迎风处理平衡界面通量^[10]:

$$B = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(\lambda_k)) \beta_k e_k \quad (12)$$

将计算区域用三角形单元进行剖分, 对每个三角单元采用上述方式计算对流项、扩散项、底坡源项, 结合求解水域的初始条件和边界条件, 最终计算形式可表示如下:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \left(\sum_{m=1}^3 \frac{1}{2} ((E \cdot n)_L + (E \cdot n)_R - \sum_{k=1}^3 (\alpha_k |\lambda_k| - (1 - \text{sign}(\lambda_k))) e_k) l_m \right)^n - \frac{\Delta t}{A_i} \left(\sum_{m=1}^3 \frac{1}{2} ((E^d \cdot n)_L + (E^d \cdot n)_R) l_m \right)^n + \Delta t (S_f)_i^n \quad (13)$$

3 计算实例

3.1 圆柱绕流

圆柱绕流算例可用来检验计算模式对水流激波的捕捉能力, 圆柱尾流范围可检验水流方程中紊动黏性项的作用效果. 在此考虑恒定流的圆柱绕流形态, 模拟矩形水槽长 2 000 m, 宽 1 000 m, 圆柱直径 150 m, 圆柱周围水域采用三角形网格剖分, 网格最小边长 5.0 m. 水槽两端采用恒定水位控制: 上游水位 5.5 m, 下游 5.0 m. 从图 4 的流态分布来看, 圆柱迎水面对称分流, 圆柱背水面的尾流范围长约 3 倍半径, 圆柱迎水面和尾流区内流速均比较小, 圆柱两侧水域流速较大. 图 5 为圆柱周围水面线分布, 可见圆柱正前方和两侧分别出现小范围的壅水和跌水, 圆柱后方则出现较大范围的跌水现象, 壅水区和跌水区水面水位差可达到 0.25 m. 以上圆柱绕流流态和水面线变化均与实际情况相符, 表明含有紊动黏性项的浅水方程可较真实地反映圆柱周围复杂的水流流态.

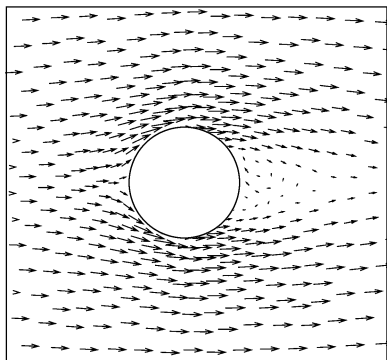


图 4 圆柱绕流平面流态

Fig. 4 Flow pattern around column

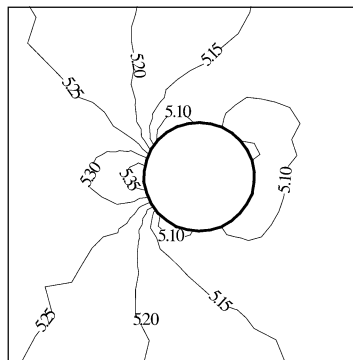


图 5 圆柱附近水面线

Fig. 5 Flow profile around column

3.2 海中人工岛潮流运动模拟

港珠澳大桥东起香港机场, 跨越珠江口(伶仃洋), 西端分成 Y 字形, 一端连接珠海, 一端连接澳门. 大桥采用桥隧结合形式, 主通航区段为隧道, 非主通航区段为桥梁, 用东、西两人工岛实现桥隧结构转换(图 6). 数学模型计算范围覆盖整个伶仃洋河口湾^[11], 采用三角形网格剖分, 西人工岛附近水域网格剖分效果见图 7, 三角单元网格的最小边长为 10.0 m. 在对 2004 年 6 月夏季大潮水文资料验证的基础上, 对伶仃洋的潮流运动进行了模拟, 并对设计方案实施后桥区水域的潮流运动进行了模拟计算. 涨急时刻西人工岛附近水域的平面流态如图 8 所示, 潮流在人工岛迎水面分流, 在背水面形成较大范围的双向回流区. 图 9 为流速等值线图, 可见, 在人工岛的迎水面和背水面流速较小, 其中背水面小流速区范围较大, 人工岛两侧受挑流作用流速增加较为明显, 桥墩间流速也有所增加. 图 10 显示了人工岛附近水域潮位水面线分布情况, 人工岛的迎水面

有小范围的壅水,而背水面则有较大范围的跌水现象,人工岛两侧的壅水面和跌水面的潮位差达 8 cm. 可见该模型有效地模拟出了海中人工岛附近水域较为复杂的潮流运动.



图6 港珠澳大桥线位示意图

Fig. 6 Position of Hongkong-Zhuhai-Macao Bridge

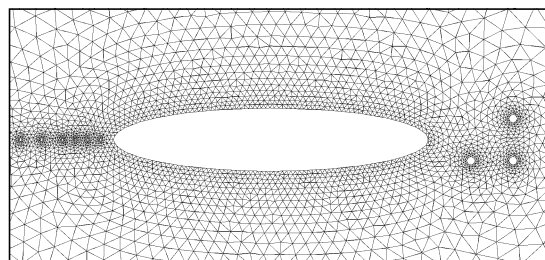


图7 西人工岛水域网格剖分

Fig. 7 Grid dissected around west artificial island

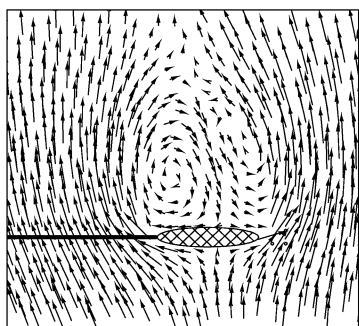


图8 西人工岛涨急平面流态

Fig. 8 The flood flow pattern around west artificial island

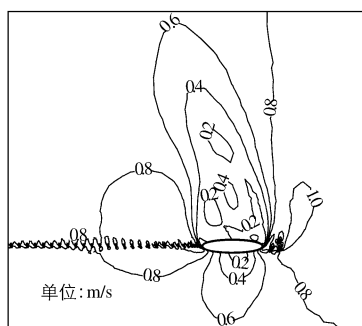


图9 西人工岛附近水域流速分布

Fig. 9 The flow distribution around west artificial island

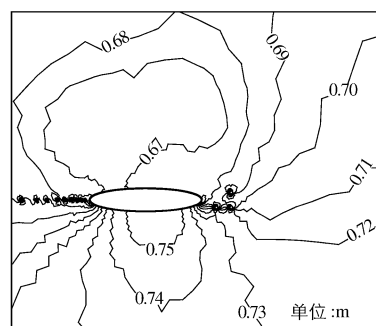


图10 人工岛附近潮位水面线分布

Fig. 10 The tidal level distribution around west artificial island

4 结 语

采用无结构网格可以比较真实地拟合出水建筑物的形状和尺寸,采用有限体积法则可提高数学模型计算的精度和效率. 在对实际河流海岸工程模拟的过程中,尤其是模拟出水建筑物附近水体运动时,紊动黏性项在浅水方程中所起的作用将会突显. 在对浅水方程求解过程中,单元界面紊动黏性项的数值通量通过界面两侧的平均值来估算,对于积分转换后的一次微分项采用类似有限元的方法计算,从而实现了浅水方程紊动黏性项的求解. 应用该模式对水槽中的圆柱绕流和港珠澳大桥海中人工岛的潮流运动进行了模拟,结果表明该模式可用于实际工程水流运动的数值模拟研究.

参 考 文 献:

- [1] 胡四一, 谭维炎. 无结构网格上二维浅水流动的数值模拟[J]. 水科学进展, 1995, 6(3): 1-9. (HU Si-yi, TAN Wei-yan. Numerical modeling of 2D shallow water flow on unstructured grids[J]. Advances in Water Science, 1995, 6(3): 1-9. (in Chinese))
- [2] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 135(2): 250-258.
- [3] HARTEN A, LAX P D, VAN LEER B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws [J]. SIAM Rev, 1983, 25(1): 35-61.
- [4] 李未. Roe-Upwind 有限体积模型及对涌潮形成动力机制的数值研究[D]. 南京: 河海大学, 2006. (LI Wei. Roe-Upwind finite volume model and numerical simulation of the tidal bore[D]. Nanjing: Hohai University, 2006. (in Chinese))

- [5] 王志力. 具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟[J]. 水利学报, 2005, 36(4): 439-444. (WANG Zhi-li. Numerical modeling of 2D shallow water flow with complicated geometry topography[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(4): 439-444. (in Chinese))
- [6] 耿艳芬, 王志力. 桥渡对河道水流影响的二维无结构网格模型[J]. 水利水运工程学报, 2008(4): 78-83. (GENG Yan-fen, WANG Zhi-li. 2D unstructured finite volume model for bridge pier flow[J]. Hydro-Science and Engineering, 2008(4): 78-83. (in Chinese))
- [7] BRUFAU P, GARCIA-NAVARRO, Vázquez-CENDÓN M E. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography[J]. Int J Numer Meth Fluids, 2004, 45(10): 1047-1082.
- [8] ROGERS B D. Mathematical balancing of flux gradient and source terms prior to using Roe's approximate Riemann solver[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 192(2): 422-451.
- [9] BRUFAU P, GARCIA-NAVARRO P. Two-dimensional dam break flow simulation[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2000, 33(1): 35-57.
- [10] HUBBARD M E, GARCIA-NAVARRO P. Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165(1): 89-125.
- [11] 辛文杰, 何杰. 港珠澳大桥建设对伶仃洋港口航道影响分析[R]. 南京: 南京水利科学研究院, 2006. (XIN Wen-jie, HE Jie. Effect of Hongkong-Zhuhai-Macao Bridge for harbor and sea-route in Lingdingyang Bay [R]. Nanjing: Nanjing Hydraulic Research Institute, 2006. (in Chinese))

Numerical solution to the shallow water equation with diffusion motion

HE Jie^{1,2}, XIN Wen-jie^{1,2}

(1. *Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, China*; 2. *State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Nanjing 210029, China*)

Abstract: The diffusion motion is one of the important items in the shallow water equations, and it is a crucial factor for the stability to simulate the shallow water flow in numerical model. In this paper, a 2D model for the simulation of shallow water flow by convection and diffusion over variable bottom is presented, which is based on a finite volume method over triangular unstructured grids. The format of Roe's approximate Riemann is adopted to solve the flux terms. And the bed slope source term is treated by use of flux eigenvector. For the diffusion terms, the divergence theorem is employed to obtain the derivatives of a scalar variable on each triangular cell. Then, the flow around a pillar is simulated, in which flow pattern is similar with the actual flow. Lastly, the tidal flow around an artificial island in HongKong-Zhuhai-Macao Bridge is simulated successfully. So the model can be applied to simulate the complicated current structure in the water area around hydraulic projects.

Key words: diffusion motion; shallow water flow; finite volume method; unstructured grids; artificial island