

非结构化网格下求解二维浅水方程的和谐 Roe 格式

吕 彪, 金 生, 艾丛芳

(大连理工大学 土木水利学院海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 为保证底坡源项和重力梯度项的平衡离散, 采用把底坡源项分解为两不同部分单独处理的方法, 在非结构化网格上建立了求解带复杂地形的二维浅水方程数值模型. 采用 Roe 格式的计算界面通量, 隐式求解摩擦力源项以增加格式的稳定性, 并给出计算格式在非结构化网格上满足和谐性条件的证明. 通过实例验证了此格式是和谐的, 并具有良好的间断捕捉能力和稳定性.

关 键 词: 底坡源项; 非结构化网格; Roe 格式; 浅水方程; 平衡离散

中图分类号: TV131.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-640X(2010)02-0039-06

以近似 Riemann 解为基础的 Godunov 格式求解强间断、大梯度流动的平底和无摩阻的齐次浅水方程时得到很好的结果^[1,3], 但在求解有源项的二维浅水方程时, 由于不能保证源项和流量梯度的平衡, 所以此类格式不具有“和谐性”. 针对该问题, Bermudez 和 Vazquez-Cendon^[4]引入了说明计算格式“和谐性”的 C 特性, 即在非平底静水条件下, 流速为零, 水位为常数. Zhou 等^[2]采用 HLL 格式和水位梯度法处理具有复杂地形的浅水流动时, 证明了 C 特性能够得到满足, 但是此方法不能直接运用到非结构化网格上. Mohamadian 等^[5]提出采用改进的 Roe 方法, 能保证 C 特性, 但由于压力项采用非守恒格式离散只能做到质量守恒而不能保证全局守恒. 此外艾丛芳^[6], 王志力^[7], Brufau^[8], Liang^[9], Caselles^[10]及潘存鸿^[11]等也都提出了各自的处理方法.

本文采用水位梯度法处理界面处的水深, 应用把底坡源项分解为两部分单独处理的技术, 采用 Roe 格式计算界面通量, 在非结构化网格下建立了求解二维浅水方程的有限体积数值模型, 解决了上述问题, 并给出格式满足 C 特性的数学证明. 对摩擦力源项采用全隐式离散, 增加了格式的稳定性. 通过两个算例来验证本文提出的方法是和谐的并具有良好的间断捕捉能力.

1 控制方程

守恒型的二维浅水方程为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot E = S + \nabla \cdot E^d \quad (1)$$

$$\text{式中: } E = (F, G), E^d = (F^d, G^d), U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + 0.5gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + 0.5gh^2 \end{pmatrix}, F^d = \begin{pmatrix} 0 \\ (\nu + \nu_t)h\partial u/\partial x \\ (\nu + \nu_t)h\partial v/\partial x \end{pmatrix}, G^d = \begin{pmatrix} 0 \\ (\nu + \nu_t)h\partial u/\partial y \\ (\nu + \nu_t)h\partial v/\partial y \end{pmatrix}, S = S_0 + S_f = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{fx} \\ ghS_{fy} \end{pmatrix}.$$

收稿日期: 2009-04-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50579084)

作者简介: 吕 彪(1981-), 男, 安徽阜阳人, 博士研究生, 主要从事计算水力学研究. E-mail: slxlvbiao@163.com

其中: h 为水深; u, v 分别为 x, y 方向的流速; g 为重力加速度; 上标 d 表示扩散项; ν 和 ν_t 分别为流体和涡黏性系数; z 为底面到参考面的距离; S_{0x}, S_{0y} 分别为 x, y 方向的底坡源项; S_{fx}, S_{fy} 分别为 x, y 方向的底摩擦力源项,

分别表示为: $S_{0x} = \frac{\partial z}{\partial x}, S_{0y} = \frac{\partial z}{\partial y}, S_{fx} = -\frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, S_{fy} = -\frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$.

2 数 值 离 散

为适应复杂几何形状流场的数值计算, 本文采用三角形网格剖分计算域. 采用 CC (cell centre) 方式的有限体积法, 把变量定义在单元的中心, 单元的边界为控制体. 在每个控制体上对式(1)进行积分有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla E - \nabla E^d) d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (2)$$

假设 U_i 为单元的平均值存储在单元的中心, 利用 Green 公式, 式(2)可变为

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \Omega_i + \int_{\partial \Omega_i} (En - E^d n) ds = \int_{\Omega_i} S d\Omega \quad (3)$$

式中: Ω_i 为单元 i 的面积; $\partial \Omega_i$ 为单元的边界; n 为控制边的单位外方向矢量. 式(3)中左边第 2 项可以描述为

$$\int_{\partial \Omega_i} (En - E^d n) ds = \sum_{k=1}^3 (E_k^* - E_k^d) \Delta s_k \quad (4)$$

本文采用中心格式计算界面扩散项通量 E_k^d , Roe 格式的近似 Riemann 解求解界面通量 E_k^* .

2.1 控制体界面的通量计算

Mohamadian 等^[5]指出在求解环流问题时, 中心格式能得到很好结果. 扩散通量 $E^d = 0.5(E_R^d + E_L^d)$, 应用 Roe 格式求解通量 E_k^* , 可以写为:

$$E_k^* = (F, G)^* n = 0.5[(F, G)_R n + (F, G)_L n - |J_{RL}|(U_R - U_L)] \quad (5)$$

式中: J_{RL} 为 Roe 平均的 Jacobian 矩阵, 其特征值和右特征向量 $R = (\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \tilde{e}^3)$ 分别为 $\lambda^1 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c}$, $\lambda^2 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y$, $\lambda^3 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c}$, $\tilde{e}^1 = (1 \quad \tilde{u} \quad \tilde{c}n_y)^T$, $\tilde{e}^2 = (0 \quad -\tilde{c}n_y \quad \tilde{c}n)^T$, $\tilde{e}^3 = (1 \quad \tilde{u} - \tilde{c}n_x \quad \tilde{v} - \tilde{c}n_y)^T$.

将 $U_R - U_L$ 沿右特征向量方向进行特征分解有

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{m=1}^3 \alpha^m e^m \quad (6)$$

式中: $\alpha^{1,3} = \frac{h_R - h_L}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}}[(hu)_R - (hu)_L n_x + (hv)_R - (hv)_L n_y - (\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y)(h_R - h_L)]$ (7)

$$\alpha^2 = \frac{1}{\tilde{c}}[(hv)_R - (hv)_L - \tilde{v}(h_R - h_L)n_x - ((hu)_R - (hu)_L - \tilde{u}(h_R - h_L))n_y] \quad (8)$$

将式(5)代入式(6), 界面通量可以表示为

$$E^* = (F, G)^* n = 0.5[(F, G)_R n + (F, G)_L n - \sum_{m=1}^3 |\lambda^m| \alpha^m \tilde{e}^m] \quad (9)$$

2.2 底坡源项的处理

在求解守恒型非平底浅水流动方程时, 由于重力项($0.5gh^2$)和底坡源项的离散往往不能保证平衡, 所以在数值模拟中不能保证计算格式的和谐性. 为了使采用的底坡源项处理方法具有和谐性, 采用高阶准确的插值方法来计算界面两侧的水位值, 这是由于在静水条件下有 $\Delta h = 0$, 所以 C 特性的证明与界面两侧变量值的选取精度无关. 在水位梯度法^[2]中, 单元界面处采用水位来计算界面处值, 对标量水位 η , 界面两侧的 η_L 和 η_R 通过 κ 方法^[12]来计算, 因篇幅限制, 不详细说明. 一旦求解出 η_L , 水深可由 $h_L = \eta_L + z_e$ 求得, 其中 Z_e 为界面中点处底面与参考面的距离. 在静水条件下, $\eta_L = \eta_R = \eta_0$, 这里 η_0 表示常水位, 从而得到 $h_L = h_R = \eta_0 + z_0$, 故在界面处有 $\Delta h = 0$, 这是本文方法保持 C 特性的关键.

利用散度理论来计算三角形单元 i 上标量的偏导数值. 在三角形控制单元 i , 采用把底坡源项分解为 A_1 和 A_2 两部分单独处理, 具体如下:

$$\begin{aligned} gh \frac{\partial z}{\partial x} &= g \underbrace{\frac{\partial(hz)}{\partial x}}_{A_1} - \underbrace{gz \frac{\partial h}{\partial x}}_{A_2} = 0.5g \frac{\partial(hz)}{\partial x} + 0.5g \frac{\partial(hz)}{\partial x} - gz \frac{\partial h}{\partial x} \\ &= 0.5g \underbrace{\frac{\partial(hz)}{\partial x}}_{B_1} + 0.5gh \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{B_2} - 0.5gz \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}}_{B_3} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{其中: } B_1 = \frac{0.5g}{\Omega_i} \left(\frac{h_1^L + h_1^R}{2} z_1 \Delta y_1 + \frac{h_2^L + h_2^R}{2} z_2 \Delta y_2 + \frac{h_3^L + h_3^R}{2} z_3 \Delta y_3 \right), B_2 = \frac{0.5gh_i}{\Omega_i} (z_1 \Delta y_1 + z_2 \Delta y_2 + z_3 \Delta y_3), B_3 = \frac{0.5gz_i}{\Omega_i} \left(\frac{h_1^L + h_1^R}{2} \Delta y_1 + \frac{h_2^L + h_2^R}{2} \Delta y_2 + \frac{h_3^L + h_3^R}{2} \Delta y_3 \right).$$

下面给出本文方法保持 C 特性的证明.

在静水条件下有: $h_1^R = h_1^L = h_1, h_2^R = h_2^L = h_2, h_3^R = h_3^L = h_3, \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_0$. 在式(3) x 方向的动量方程中, 左端第2项变为 $\int_{\Omega} [\partial(0.5gh^2)/\partial x] d\Omega$, 在控制体 i 上 x 方向的动量方程离散有

$$\begin{aligned} (uh)_i^{n+1} \Omega_i &= (uh)_i^n \Omega_i - 0.5g\Delta t (h_1^2 \Delta y_1 + h_2^2 \Delta y_2 + h_3^2 \Delta y_3) + \Delta t \Omega_i (B_1 + B_2 - B_3) \\ &= (uh)_i^n \Omega_i - 0.5g\Delta t (h_1 \Delta y_1 (h_1 - z_1) + h_2 \Delta y_2 (h_2 - z_2) + h_3 \Delta y_3 (h_3 - z_3)) + \Delta t \Omega_i (B_2 - B_3) \\ &= (uh)_i^n \Omega_i - 0.5g\Delta t (h_2 (h_1 - z_1) \Delta y_1 + h_2 (h_2 - z_2) \Delta y_2 + h_3 (h_3 - z_3) \Delta y_3) + \Delta t \Omega_i (B_2 - B_3) \\ &= (uh)_i^n \Omega_i - 0.5g\eta_0 \Delta t (h_1 \Delta y_1 + h_2 \Delta y_2 + h_3 \Delta y_3) + \Delta t \Omega_i (B_2 - B_3) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (B_2 - B_3) \Omega_i &= 0.5gh_i ((h_1 - \eta_1) \Delta y_1 + (h_2 - \eta_2) \Delta y_2 + (h_3 - \eta_3) \Delta y_3) - 0.5gz_i (h_1 \Delta y_1 + h_2 \Delta y_2 + h_3 \Delta y_3) \\ &= 0.5g(h_i - z_i) (h_1 \Delta y_1 + h_2 \Delta y_2 + h_3 \Delta y_3) + 0.5g\eta_0 h_i (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3) \\ &= 0.5g\eta_0 (h_1 \Delta y_1 + h_2 \Delta y_2 + h_3 \Delta y_3) \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11), 有 $(uh)_i^{n+1} \Omega_i = (uh)_i^n \Omega_i$. 式(3) y 方向动量方程的证明同上, 有 $(vh)_i^{n+1} \Omega_i = (vh)_i^n \Omega_i$, 所以 C 特性得到满足, 证毕.

2.3 底摩擦源项的处理

底摩擦的处理对计算格式的稳定性影响较大, 本文采用全隐式离散, 增加格式的稳定性. 式(3)可以分解为两个偏微分方程组

$$\frac{dU_i}{dt} = S_{f,i} \quad (13)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \Omega_i + \int_{\partial \Omega} (En - E^n n) ds = \int_A S_{0,i} dA \quad (14)$$

方程(14)采用显式求解, 方程(13)用隐式求解, 通过 Taylor 公式展开整理有:

$$\left(I - \Delta t \frac{\partial S_{f,i}^n}{\partial U} \right) \Delta U_i = \Delta t S_{f,i}^n \quad (15)$$

式中: n 表示时刻; I 为单位矩阵; $\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n$. 底摩擦源项对 ΔU 贡献可以通过式(15)解得.

3 算例验证

3.1 静水问题

本算例用来检验计算格式的和谐性. 计算域为正方形, $0 \leq x \leq 1$ m 和 $0 \leq y \leq 1$ m. 底高程为

$$z_b(x, y) = \max[0, 0.25 - 5((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)] \quad (16)$$

初始条件为静水, 即水位 $H=0.1$ m, 流速 $u=0, v=0$. 图1中的(a)和(b)给出水位等值线和速度矢量, (c)和(d)给出水面变化, 图1(a)和(c)是本文方法计算的结果, 图1(b)和(d)为没有特殊源项处理的 Roe

方法计算的结果,通过比较能够看出,本文的方法在求解非平底浅水流动问题时是和谐的.

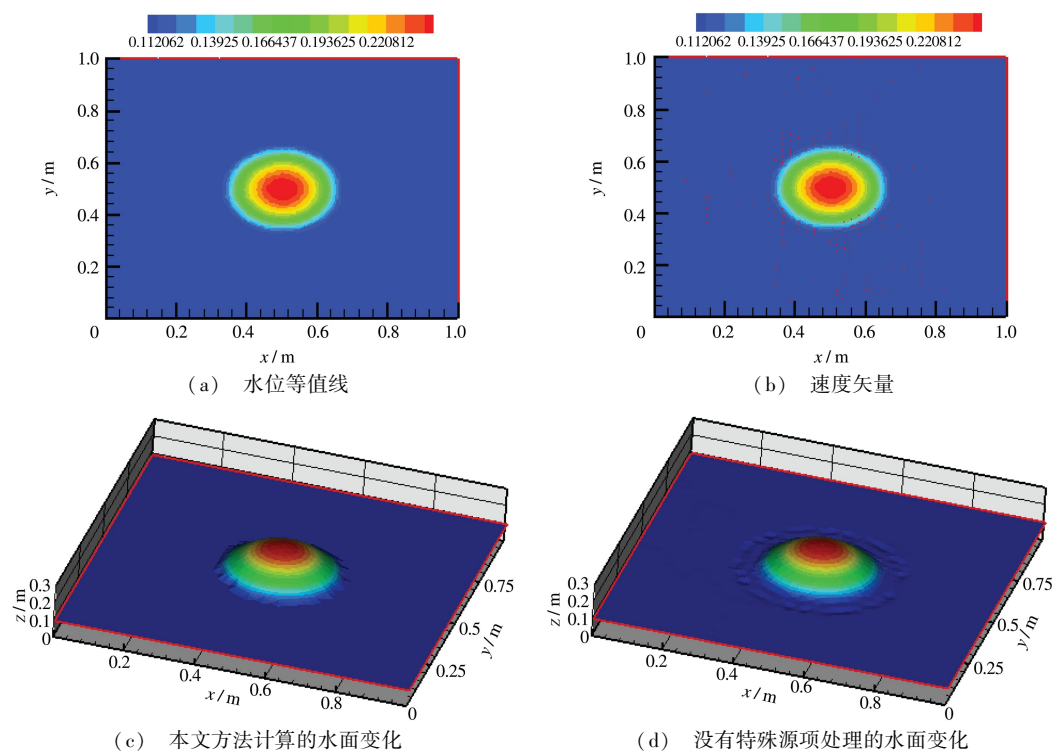


图 1 封闭水池的水位等值线、流速矢量和水面变化

Fig. 1 Iso-contour water levels, velocity field and free surface in a closed pool

3.2 溃坝波在三角形挡水建筑物中的传播

通过这个算例来检验模型处理实际物理问题的能力. 物理模型由一个蓄水池和一个矩形渠道构成(见图 2).

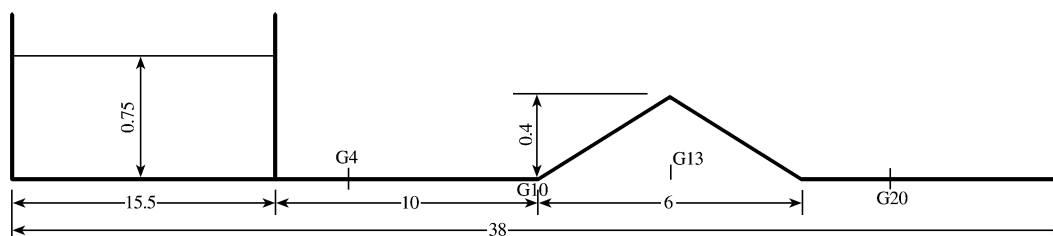


图 2 实验模型及测点(单位:m)

Fig. 2 Geometry of the experimental model and location of the gauging points (unit: m)

计算初始时,蓄水池水深为 0.75 m,渠道水深为 0. 计算域由 4 000 个三角形单元所覆盖,底面糙率为 0.012 5. 图 3 给出了测点 G4, G10, G13 和 G20 的本文计算水深和测量水深变化过程的比较. 可见,三角形挡水建筑物前的测点计算结果能准确地反映溃坝波的传播,测点 G13 位于挡水建筑物的顶端,因此是关键测点,从验证结果看其干湿界面的变化是合理的;测点 G20 计算值与测量值稍有差别,但是水体的总量为小量,可以忽略不计,这或许跟浅水方程忽略了垂向非静压运动有关.

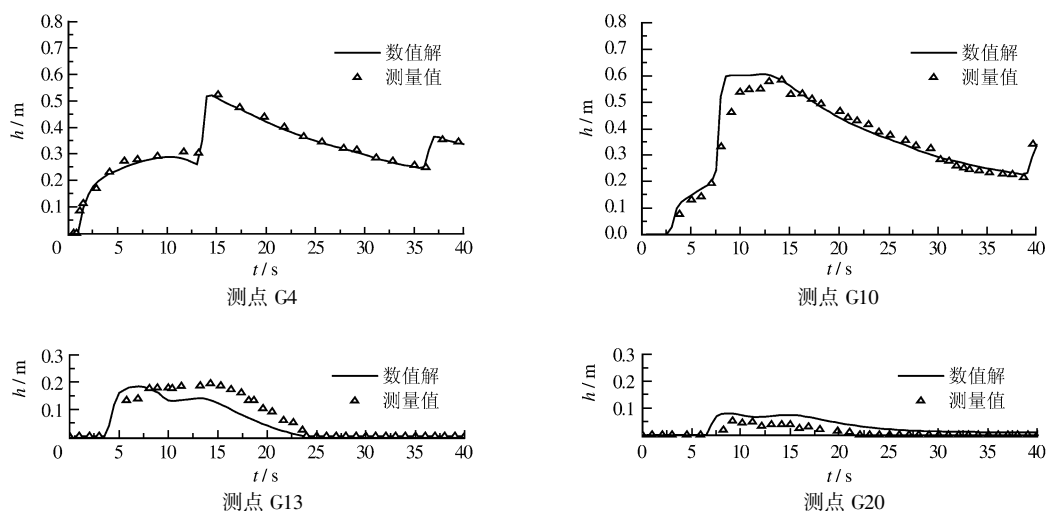


图3 测点 G4, G10, G13, G20 的计算水深和测量水深

Fig.3 Calculated and measured water depth at gauging points G4, G10, G13 and G20

4 结 语

针对浅水流动具有复杂区域和地形等特点,本文采用特殊的底坡源项处理技术,克服了简单处理源项出现不和谐的缺点,非结构化网格下建立了求解二维浅水方程的和谐 Roe 格式. 为了增加格式的稳定性,底摩擦源项采用隐式求解. 通过实例验证,此计算格式是和谐的并具有良好的间断捕捉能力和稳定性.

参 考 文 献:

- [1] 汪继文, 刘儒勋. 间断解问题的有限体积法[J]. 计算物理, 2001, 18(2): 97-105. (WANG Ji-wen, LIU Ru-xun. Finite volume methods for solving the problem of discontinuous solution[J]. Chinese Journal of Computation Physics, 2001, 18(2): 97-105. (in Chinese))
- [2] ZHOU J G, CAUSON D M, MINGHAM C G. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 168(1): 1-25.
- [3] YOON T H, KANG S. Finite volume model for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 130(7): 678-688.
- [4] BERMUDEZ A, VAZQUEZ-CENDON M E. Upwind method for hyperbolic conservation laws with source terms[J]. Computers and Fluids, 1994, 23(8): 1049-1071.
- [5] MOHAMADIAN A, LE ROUX D Y, TAJRISHI M, et al. A mass conservative scheme for simulating shallow flows over variable topographies using unstructured grids[J]. Advances in Water Resources, 2005, 28(5): 523-539.
- [6] 艾丛芳, 金 生. 基于三角形网格求解二维浅水方程的改进的 HLL 方法[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 2007, 22(6): 723-729. (AI Cong-fang, JIN Sheng. Application of improved HLL scheme for 2D shallow water equation with triangular meshes[J]. Journal of Hydrodynamics(Ser A), 2007, 22(6): 723-729. (in Chinese))
- [7] 王志力, 耿艳芬, 金 生. 具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟[J]. 水利学报, 2005, 36(4): 439-444. (WANG Zhi-li, GENG Yan-fen, JIN Sheng. Numerical modeling of 2D shallow water flow with complicated geometry and topography[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(4): 439-444. (in Chinese))
- [8] BRUFAU P, GARCIA-NAVARRO P, VAZQUEZ-CENDON M E. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2004, 45(10): 1047-1082.
- [9] LIANG Qiu-hua, BORTHWICK A G L. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet-dry fronts over complex topography[J]. Computers and Fluids, 2009, 38(2): 221-234.

- [10] CASELLES V, DONAT R, HARO G. Flux-gradient and source-term balancing for certain high resolution shock-capturing schemes[J]. Computers and Fluids, 2009, 38(1): 16–36.
- [11] 潘存鸿. 三角形网格下求解二维浅水方程的和谐 Godunov 格式[J]. 水科学进展, 2007, 18(2): 204–209. (PAN Cun-hong. Well-balanced Godunov-type scheme for 2D shallow water flow with triangular meshes[J]. Advances in Water Science, 2007, 18(2): 204–209. (in Chinese))
- [12] BATINA J T. Implicit flux-split Euler schemes for unsteady aerodynamics analysis involving unstructured dynamic meshes[J]. AIAA Journal, 1990, 29(11): 1836–1843.

Well-balanced roe-type scheme for 2D shallow water flow using unstructured grids

LV Biao, JIN Sheng, AI Cong-fang

(Dalian University of Technology, State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian 116024, China)

Abstract: In order to establish the balance between the bed slope source terms and the gravity gradient terms, a method to treat the bed slope source terms considering different components of the bed slope term separately is proposed in this paper. The paper develops a numerical model for solving two dimensional shallow water flow equation with complicated topography over unstructured grids. The Roe's approximate Riemann solver is used in the calculation of interface flux. The implicit method is used to calculate the friction source terms and enhance the stability of calculation. It is confirmed by an algebraic manipulation that the proposed scheme is well balanced. The good quality of the results is illustrated by means of two examples.

Key words: bed slope source term; unstructured grid; Roe's scheme; shallow water flow equation; balance discretization