

具有指定边界网格间距和正交性的 BFC 网格生成方法

蒋光彪^{1,2}, 何永森¹, 舒适¹

(1. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105; 2. 中南林业科技大学 流变力学与材料工程研究所, 湖南 长沙 410004)

摘要: 边界拟合曲线坐标(BFC)网格生成的质量直接影响流场的数值模拟精度和收敛速度,而如何选取生成BFC网格的Poisson方程右端调节因子 P 和 Q ,则关系到生成的BFC网格质量.本文提出了一种可以同时实现控制网格正交性和控制边界网格间距的BFC网格生成的新方法.该方法可任意控制生成的网格边界间距大小,同时,生成的BFC网格还具有边界及内部较好的正交性.应用实例的计算结果表明,该方法能够对复杂边界的单连通域或多连通域生成较理想的BFC网格,网格分布能够适应流动参数的变化.

关键词: BFC网格; Poisson方程; 调节因子; 正交性; 网格间距

中图分类号: O242

文献标识码: A

文章编号: 1009-640X(2009)03-0067-05

紊流数值计算中常采用有限差分方法,在流场的数值模拟中,求解域复杂的几何边界给数值模拟带来了很大的困难.如何用差分法处理复杂几何区域的紊流数值模拟是许多学者研究的课题.边界拟合坐标(BFC)网格生成质量对于流场的数值计算精度具有重要意义.目前生成BFC网格最常用的方法是求解偏微分方程组的Thompson微分方程法^[1].微分方程网格生成方法是网格生成方法中的一类经典方法.这类方法利用微分方程的解析性质,如调和函数的光滑性、变换中的正交不变性等,通过偏微分方程组将物理空间坐标和计算空间坐标联系起来.根据用来生成贴体网格微分方程类型的不同,微分方程网格生成方法又分为椭圆型方程方法、双曲型方程方法和抛物型方程方法.其中,常用的方法是椭圆型方程方法^[2].微分方程网格生成方法所生成的网格较代数网格光滑、合理、通用性强,同时微分方程网格生成方法可以生成贴体坐标网格,且对流场中物理量梯度大处任意加密.本文采用椭圆型微分方程数值网格生成方法.

1 BFC 网格生成概述

BFC网格生成的主要思想是基于一种BFC坐标变换,将物理平面内复杂的几何区域变换到计算平面内的规则几何区域,以便用有限差分方法求解控制方程.其相应的数学问题就是求解一个带第一类Dirichlet边界条件的边值问题.设物理面的坐标变量和计算面的坐标变量的关系为: $x = x(\xi, \eta)$, $r = r(\xi, \eta)$; $\xi = \xi(x, r)$, $\eta = \eta(x, r)$,物理面和计算面用以下椭圆型方程相关联:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (1)$$

当计算面内是正交直线网格(坐标为 (ξ, η))时,为了求物理面上的对应点(坐标为 (x, y)),要通过从计算面向物理面的反变换,沿边界形状自动地生成适合于边界的曲线网格,进而可控制全部求解域内的曲线坐标网格的配置.反变换偏微分方程如下:

收稿日期: 2008-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59375211, 10771178, 10676031)

作者简介: 蒋光彪(1975-),男,湖南永州人,讲师,博士研究生,主要从事计算流体力学的研究.

E-mail: jiang_gb@163.com

$$\begin{aligned}\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta})\end{aligned}\quad (2)$$

式中: $\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$, $\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}$, $\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$, $J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$ (J 为变换的雅可比行列式); $P = f(\xi, \eta)$, $Q = g(\xi, \eta)$ 可控制网格的配置, 称为调节因子, 作用是调节物理平面内曲线网格的形状及疏密程度。

求解反变换偏微分方程(2), 可得到与计算面坐标 (ξ, η) 一一对应的物理面坐标 (x, y) 值。其边界条件是, 只要在物理面上赋予求解域边界上边界点的 (x, y) 坐标值。J. F. Thompson^[2,3] 建议 $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ 的表达式为:

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\xi - \xi_j) \exp\{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}\} \quad (3)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) - \sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\eta - \eta_j) \exp\{-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}\} \quad (4)$$

在实际的网格生成中, Thompson 控制函数可能存在以下几个问题: ①可调整的参数过多, 当网格生成质量不理想时, 很难确定调整哪一个参数才能改善网格的质量; ②网格生成迭代过程中不易收敛; ③参数选取不当易引起双映射现象; ④不能保证生成的网格在边界处正交。

2 BFC 网格生成的新方法

紊流数值模拟中, 在流动参数变化剧烈的流场固壁边界附近, 往往需要加密网格和较小的网格间距, 并且为了提高计算精度, 要求边界及内部具有好的正交性。本文综合考虑这些要求, 提出了一种既可控制网格边界间距大小, 又具有较好的网格全局正交性的 BFC 网格生成方法。首先, 可以根据流场数值模拟需要任意指定从边界跨出的第一条网格线与边界的间距, 从而生成具有指定边界网格间距边界且可任意加密的网格, 然后对生成的网格进行正交性修正, 改善边界附近的网格正交性。

2.1 具有指定边界网格间距的初始 BFC 网格生成

用任意加密的适体网格自动生成方法, 把计算平面内的平行直线正交网格变换为物理平面内的曲线网格, 使之能正确反映边界形状, 并且可在求解域内调节网格疏密度。对于固体壁面附近流动参数梯度较大的区域, 需要加密网格, 离壁面越远, 网格配置越稀疏。采用考虑了紊流场特点的二阶偏微分方程可达到调节网格的目的, 在计算平面的正交网络上求各网格点的坐标值, 所求解的方程为上述二阶偏微分方程的反变换方程^[4]:

$$\begin{aligned}\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 \left[e^{-am} \left(P_1 x_{\xi} + \frac{1}{2} |P_1| x_{\xi\xi} \right) + e^{-bm} \left(Q_1 x_{\eta} + \frac{1}{2} |Q_1| x_{\eta\eta} \right) + \right. \\ &\quad \left. e^{-an} \left(P_2 x_{\xi} + \frac{1}{2} |P_2| x_{\xi\xi} \right) + e^{-bn} \left(Q_2 x_{\eta} + \frac{1}{2} |Q_2| x_{\eta\eta} \right) \right]\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 \left[e^{-am} \left(P_1 y_{\xi} + \frac{1}{2} |P_1| y_{\xi\xi} \right) + e^{-bm} \left(Q_1 y_{\eta} + \frac{1}{2} |Q_1| y_{\eta\eta} \right) + \right. \\ &\quad \left. e^{-an} \left(P_2 y_{\xi} + \frac{1}{2} |P_2| y_{\xi\xi} \right) + e^{-bn} \left(Q_2 y_{\eta} + \frac{1}{2} |Q_2| y_{\eta\eta} \right) \right]\end{aligned}\quad (6)$$

式中: $m = \eta - \eta_1$, $n = \eta_2 - \eta$, η_1, η_2 为计算面上的两条网格线; P_1, P_2, Q_1, Q_2 为控制项系数, 用于控制网格的疏密; a, b 为系数调节因子 (正常数)。系数 P_1, P_2, Q_1, Q_2 并非事先指定, 而是根据指定的靠近边界第一条网格线间距, 在计算过程中随时更新迭代计算得到。通过 P, Q 值的选择, 达到边界网格加密和网格线在边界近似正交的目的。 P, Q 的计算方法^[5] 如下: 设 $\eta = \eta_1$ 为物理平面内一边界 (等 η 线)。令 $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Big|_{\xi = \text{const}}$ 为靠近边界的第一条网格线与边界的间距, 极限情况下即为:

$$ds = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} d\eta \Big|_{\xi = \text{const}} = \sqrt{(x_{\xi} d\xi + x_{\eta} d\eta)^2 + (y_{\xi} d\xi + y_{\eta} d\eta)^2} \Big|_{\xi = \text{const}}$$

由于沿 η 坐标方向, ξ 是常数, $d\xi=0$, 因此,

$$ds = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} d\eta \Big|_{\xi = \text{const}} \quad (7)$$

考虑网格线与边界正交的问题, 设等 ξ 线与等 η 线的夹角为 θ (若正交, 则 $q = \frac{\pi}{2}$), 则:

$\nabla \xi \cdot \nabla \eta = |\nabla \xi| |\nabla \eta| \cos\theta$, 即 $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \cos\theta$, 将关系式 $\xi_x = \eta_y/J, \xi_y = -x_\eta/J, \eta_x = -y_\xi/J, \eta_y = y_\xi/J$ 代入上式可得:

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = -\sqrt{(x_\eta^2 + y_\eta^2)(x_\xi^2 + y_\xi^2)} \cos\theta \quad (8)$$

联立(7)和(8)式求解, 得:

$$x_\eta = s_\eta (-x_\xi \cos\theta - y_\xi \sin\theta) / \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}, \quad y_\eta = s_\eta (-y_\xi \cos\theta + x_\xi \sin\theta) / \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}$$

故沿边界 $\eta = \eta_1$, 变换系数 $x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta, x_{\xi\xi}, y_{\xi\xi}, x_{\eta\eta}, y_{\eta\eta}$ 等均已知, 这样, 沿边界 $\eta = \eta_1$ 由反变换方程可以确定 P_1, Q_1 , 具体为:

$$P_1 = J^{-1}(y_\eta R_1 - x_\eta R_2) \Big|_{\eta = \eta_1}, \quad Q_1 = J^{-1}(-y_\xi R_1 + x_\xi R_2) \Big|_{\eta = \eta_1} \quad (9)$$

式中: $R_1 = -J^2 \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} \Big|_{\eta = \eta_1}, R_2 = -J^2 \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} \Big|_{\eta = \eta_1}$, 在边界处, $x_{\eta\eta}, y_{\eta\eta}$ 用下式计算:

$$x_{\eta\eta} = (-7x_1 + 8x_2 - x_3) / (2\Delta\eta^2 - 3x_\eta \Big|_1 \Delta\eta), \quad y_{\eta\eta} = (-7y_1 + 8y_2 - y_3) / (2\Delta\eta^2 - 3y_\eta \Big|_1 \Delta\eta)$$

采用SOR法求解方程式(5), (6)和(9), 关于 P_1, Q_1 的迭代计算格式如下:

$$\begin{aligned} P_1^{(n+1)} &= P_1^{(n)} + w_p [J^{-1}(y_\eta R_1 - x_\eta R_2)^{(n+1)} - P_1^{(n)}] \\ Q_1^{(n+1)} &= Q_1^{(n)} + w_q [J^{-1}(-y_\xi R_1 + x_\xi R_2)^{(n+1)} - Q_1^{(n)}] \end{aligned} \quad (10)$$

经过这样处理后, 生成网格的第一条网格线间距及与壁面的夹角可以根据需要任意指定. 若取较小的第一条网格线间距可以达到壁面附近网格加密的效果, 若取夹角 $\theta = \pi/2$, 则生成的网格与壁面正交.

2.2 BFC 网格正交性的改善

根据以上方法生成的网格具有指定边界网格间距, 取较小的间距可实现边界任意加密性, 但只是在临边界的第一条边界线范围内具有正交性, 在网格边界曲率较大的区域内不能保证网格良好的正交性, 通过以下修正方法可改善生成网格的正交性.

设生成网格的反变换微分方程为(2)式. Thomas 与 Middlecoff^[6]假定源函数取下面形式:

$$P(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta) (\xi_x^2 + \xi_y^2), \quad Q(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) (\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (11)$$

根据网格线与计算区域的边界局部平直(曲率为零)、正交可以确定 $\Phi(\xi, \eta)$ 和 $\psi(\xi, \eta)$ 如下:

$$\Phi(\xi, \eta) = -\frac{y_\xi y_{\xi\xi} + x_\xi x_{\xi\xi}}{x_\xi^2 + y_\xi^2}, \quad \psi(\xi, \eta) = -\frac{y_\eta y_{\eta\eta} + x_\eta x_{\eta\eta}}{x_\eta^2 + y_\eta^2} \quad (12)$$

再基于 Hilgenstock^[7]提出的通过网格与边界线的夹角修正函数 $\Phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)$, 改善网格正交性. 设关于 $\Phi(\xi, \eta)$ 和 $\psi(\xi, \eta)$ 的修正量分别为 $\Delta\Phi_1$ 和 $\Delta\psi_1$, 则

$$\Phi(\xi_1, \eta)^{(n+1)} = \Phi(\xi_1, \eta)^{(n)} + \Delta\Phi_1(\xi_1, \eta), \quad \psi(\xi, \eta_1)^{(n+1)} = \psi(\xi, \eta_1)^{(n)} + \Delta\psi_1(\xi, \eta_1)$$

其中: 修正量 $\Delta\Phi_1$ 和 $\Delta\psi_1$ 由网格与边界线的夹角确定, $\Delta\Phi_1 = \delta \cdot \tanh\left(\frac{\pi}{2} - \theta(\xi_1, \eta)\right), \Delta\psi_1 = \delta \cdot \tanh\left(\frac{\pi}{2} - \theta(\xi, \eta_1)\right), \delta$ 为阻力因子, $\theta(\xi_1, \eta)$ 表示边界 ξ_1 线与 η 线的夹角, $\theta(\xi, \eta_1)$ 表示 ξ 线与边界 η_1 的夹角.

2.3 方程的离散与求解

采用有限差分法离散反变换方程, 将各阶导数项用中心差分格式离散便可整理成迭代形式, 采用 point-SOR 或 SLOR 方法求解便可生成所需要的网格. 具体计算时, 先指定第一条网格线与边界的间距, 通过迭代计算生成具有指定边界网格间距的初始 BFC 网格, 然后调用子程序 TTM. FOR 对边界曲率较大的地方进行正交性改善与修正.

3 BFC 网格生成算例

图1为采用上述方法生成的正弦波壁绕流 BFC 网格的近壁放大图. 可见,修正前网格在曲率较大的正弦波壁处网格的正交性较差,修正后网格的正交性较好.

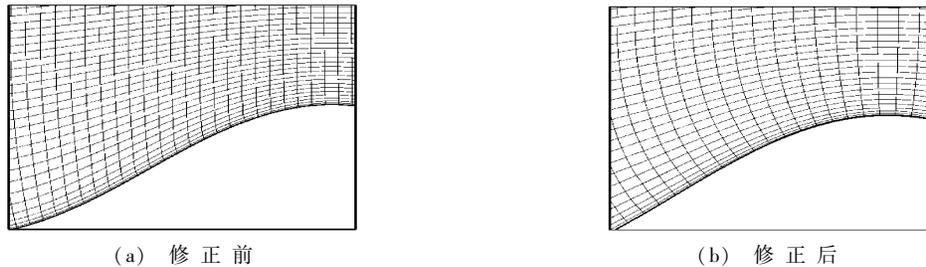


图1 网格正交性修正前后的比较(局部放大图)

Fig. 1 Comparison between meshes before and after improving the orthogonality

图2为采用上述方法生成锥形渐扩管路的 BFC 网格图. 图2(a)为设置网格间距在中心边界和壁面边界均为 0.05 时生成的等间距网格,壁面附近没有加密. 图2(b)为设置网格间距为中心边界为 0.05 和壁面边界为 0.005 时生成的非等间距网格,壁面附近网格得到加密.

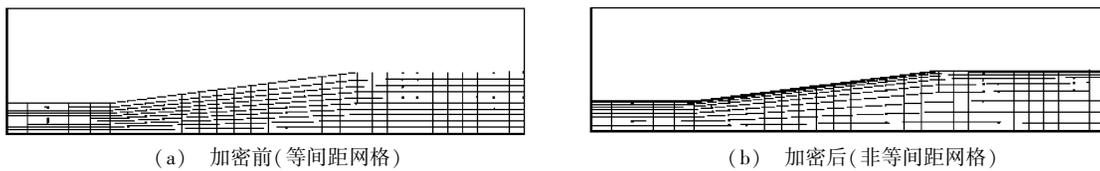


图2 锥形渐扩管路 BFC 网格加密前后的比较

Fig. 2 Comparison between meshes before and after refining for BFC grid of a conical diffuser

用本文给出的方法,对单连通及复连通两种类型计算区域生成的 BFC 网格见图3和图4,可见,边界附近得到加密且具有正交性,结果较理想.

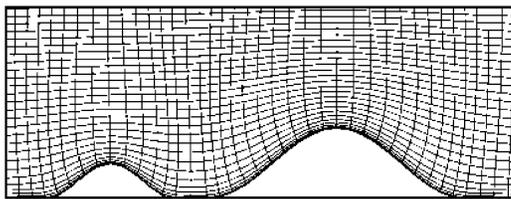


图3 双正弦波壁绕流网格图(单连通域)

Fig. 3 BFC grid of the bi-sinusoidal hills

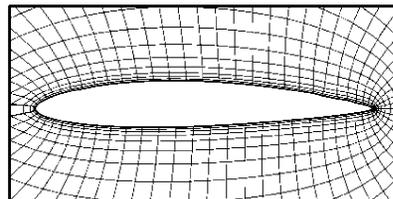


图4 机翼绕流网格图(多连通域)

Fig. 4 BFC grid of the airfoil

4 结 语

用本文给出的网格生成方法克服了以往控制函数生成网格时参数过多,不易调节的缺点;从边界跨出的第一网格的间距可以根据实际数值计算需要任意指定,生成符合要求的网格,可实现网格在边界附近任意加密;通过网格正交性修正后,提高了 BFC 网格的质量. 利用本文生成的锥形渐扩管路系统网格对相应流场的数值实验表明^[8-10],所生成的网格质量较高.

参 考 文 献:

- [1] THOMPSON J F, THAMES F C, MASTIN C W. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies[J]. J Comp Phys, 1974, 15: 299.
- [2] 董 壮. 贴体网格中几种调节因子比较[J]. 水利水运工程学报, 2002(4): 49-53. (DONG Zhuang. Comparison of some adjusting factors of boundary-fitted grid[J]. Hydro-Science and Engineering, 2002(4): 49-53. (in Chinese))
- [3] THOMPSON J F, THAMES F C, MARTIN C W. TOMCAT-A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields any number of arbitrary two-dimensional bodies[J]. J Comp Phys, 1977, 24: 274-302.
- [4] 何永森, 刘邵英. 机械管内流体数值预测[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 225-227. (HE Yong-sen, LIU Shao-ying. Numerical prediction of turbulent flows through pipelines of machinery[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999: 225-227. (in Chinese))
- [5] STEGER J L, SORENSON R L. Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations[J]. Journal of Computational Physics, 1979, 33: 405-410.
- [6] THOMAS R D, MIDDLECOEFF J F. Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations[J]. AIAA Journal, 1980, 18(6): 652-656.
- [7] HILGENSTOCK A, KURSAWE M, PFOST H, et al. Elliptic generation of three dimensional grids for internal flow calculations [J]. AIAA Journal, 1981, 10: 153-157.
- [8] HE Yong-sen, KOBAYASHI T, MORINISHI Y. Numerical prediction of turbulent flow in a conical diffuser using model for near wall and low Re number[J]. CMES, 1993: 593-599.
- [9] 何永森, 蒋光彪. 锥形渐扩管内紊流数值预测诊断系统的研究: 模型函数、网格配置和雷诺数的影响[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2006, 28(2): 1-4. (HE Yong-sen, JIANG Guang-biao. Study on diagnostic system for numerical prediction of turbulent flow in a conical diffuser: effect of model functions, grid disposition and reynolds numbers[J]. Natural Science Journal of Xiangtan University, 2006, 28(2): 1-4. (in Chinese))
- [10] JIANG Guang-biao, HE Yong-sen, SHU Shi, et al. Numerical prediction of inner turbulent flow in conical diffuser by using a new five points scheme and DLR k-e turbulence model[J]. J Cent South Univ Technol, 2008, 15(supp 1): 181-186.

Research on generating method of the BFC grid with the adjustable boundary mesh intervals and orthogonality

JIANG Guang-biao^{1,2}, HE Yong-sen¹, SHU shi¹

(1. College of Mathematics and Computer Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China; 2. Institute of Rheological Mechanics and Material Engineering, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China)

Abstract: The quality of the body-fitted coordinate (BFC) grid has great influence on the convergence velocity and the precision of numerical simulation, and the quality of grid is related to the selection of source term P and Q . In this paper, a new method is proposed to generate the BFC grid with the adjustable boundary mesh intervals and orthogonality. The real examples show that the grids can be generated by the method for the single-connected and multi-connected regions with complicated boundary.

Key words: the body-fitted coordinate (BFC) grid; Poisson equation; adjusting factor; orthogonality; grid interval