

# 梯形断面棱柱体渠道水流流态规律研究

刘曾美<sup>1</sup>, 吴俊校<sup>2</sup>

(1. 华南理工大学 水利水电工程系, 广东 广州 510640; 2. 广东省水利水电建设管理中心, 广东 广州 510600)

**摘要:**从理论上分析了梯形直棱柱体渠道的临界底坡  $i_k$  关于单宽流量  $q$  的函数特征, 研究了水流流态随单宽流量  $q$  的变化规律, 并以示例探讨。结果表明, 当边坡系数  $m \leq 0.4664$  时, 渠道存在着最小临界底坡  $(i_k)_{\min}$ ,  $(i_k)_{\min}$  随  $m$  的增大而减小, 并且可以用渠道的实际底坡  $i$  与  $(i_k)_{\min}$  相比较来分析判定渠道中水流流态随单宽流量  $q$  的变化规律; 当边坡系数  $m > 0.4664$  时, 临界底坡  $i_k$  随单宽流量  $q$  的增大而减小, 则可以通过比较实际单宽流量与临界底坡为实际底坡时对应的单宽流量的大小来判定水流流态。

**关键词:** 棱柱体渠道; 梯形断面; 流态; 临界底坡; 单宽流量; 变化规律

**中图分类号:** TV133

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-640X(2009)03-0054-05

棱柱体渠道广泛应用于农田灌排、发电、泄洪、导流及城市给排水等工程中。在棱柱体渠道的水流理论中, 均匀流水深(或正常水深)、临界水深、临界底坡等都是重要概念<sup>[1,2]</sup>。关于棱柱体渠道的均匀流水深和临界水深的计算处理已有大量文献<sup>[3-9]</sup>, 而关于临界底坡的研究则少有报道<sup>[10,11]</sup>。

棱柱体明渠的设计水面线推求是渠道纵横断面结构设计的重要内容, 设计水面线成果直接关系到渠道工程的规模。进行渠道水面线计算前, 应预先判别渠中水流的流态, 分析可能产生的水面曲线的形状, 据此判定由能量方程式来推求还是由动量方程来推求。水流流态判别有3种方法<sup>[1,2]</sup>, 即可用断面平均流速与干扰波比较来判别, 也可用弗劳德数来判别, 还可用实际水深与临界水深相比较来判别。对均匀流而言, 还可用临界底坡来判别<sup>[1,2]</sup>。在棱柱体渠道的水流理论中, 临界底坡  $i_k$  是个十分重要的概念, 常用实际底坡与临界底坡相比较来判断水流流态。当渠道的断面形状、尺寸和糙率确定后, 临界底坡仅与通过渠道的流量有关<sup>[1,2]</sup>。因此, 对于确定的明渠, 水流流态与通过的流量息息相关。韩梅<sup>[10]</sup>对矩形棱柱体渠道临界底坡变化规律及最小值进行了较深入的研究。本文主要研究梯形断面棱柱体渠道临界底坡的变化特征, 研究梯形断面棱柱体渠道水流流态随流量的变化规律, 为判断梯形渠道中明渠均匀流的流态提供新方法。

## 1 梯形断面棱柱体渠道临界底坡随流量变化规律及流态判别

均匀流的正常水深  $h_0$  等于临界水深  $h_k$  时, 相应的底坡称为临界底坡, 用  $i_k$  表示:

$$i_k = \frac{gA_k}{\alpha C_k^2 R_k B_k} = \frac{gx_k}{\alpha C_k^2 B_k} \quad (1)$$

式中:  $A_k, B_k, R_k, x_k, C_k$  分别代表渠中水深为临界水深  $h_k$  时所对应的断面面积、水面宽度、水力半径、湿周和谢才系数;  $\alpha$  为动能修正系数, 通常  $\alpha = 1$ 。

收稿日期: 2008-11-17

基金项目: 广东省防洪减灾研究项目

作者简介: 刘曾美(1970-), 女, 湖北石首人, 讲师, 博士研究生, 主要从事水文水资源和水文水利计算研究。

E-mail: liuzm@scut.edu.cn

对于梯形断面, 设边坡系数为  $m$ , 底宽为  $b$ , 则  $A_k = (b + mh_k)h_k$ ,  $B_k = b + 2mh_k$ ,  $x_k = b + 2\sqrt{1 + m^2}h_k$ ,  $C_k = R_k^{1/2}/n$ ,  $R_k = A_k/x_k$ ,  $h_k$  由下式计算确定

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = \frac{\left(1 + \frac{m}{b}h_k\right)h_k}{\left(1 + 2\frac{m}{b}h_k\right)^{1/3}} \quad (2)$$

则有:

$$i_k = \frac{n^2 g}{\alpha b^{1/3}} \frac{\left(1 + 2\sqrt{1 + m^2} \frac{h_k}{b}\right)^{4/3}}{\left[\left(1 + m \frac{h_k}{b}\right) \frac{h_k}{b}\right]^{1/3} \left(1 + 2m \frac{h_k}{b}\right)} \quad (3)$$

在具体的梯形断面棱柱体渠道中,  $m, n, b$  均为常数, 所以  $i_k = f(h_k)$ . 分析(2)式可得,  $h_k$  是单宽流量  $q$  的增函数, 故  $i_k = f(h_k)$  与  $i_k = f(q)$  具有相同的单调性. 因此, 可通过探讨  $i_k$  随  $h_k$  的变化规律来确定  $i_k$  随  $q$  的变化规律. 将(3)式对  $h_k$  微分, 整理得:

$$\begin{aligned} \frac{di_k}{dh_k} &= \frac{-n^2 g}{\alpha b^{1/3}} \frac{\left(1 + 2\sqrt{1 + m^2} \frac{h_k}{b}\right)}{\left[\left(1 + m \frac{h_k}{b}\right) \frac{h_k}{b}\right]^{4/3} \left(1 + 2m \frac{h_k}{b}\right)} \times \\ &\quad \left[ 4m^2 \sqrt{1 + m^2} \left(\frac{h_k}{b}\right)^3 + (10m^2 - 4m\sqrt{1 + m^2}) \left(\frac{h_k}{b}\right)^2 + (10m - 6\sqrt{1 + m^2}) \left(\frac{h_k}{b}\right) + 1 \right] \\ \text{令: } f\left(\frac{h_k}{b}, m\right) &= 4m^2 \sqrt{1 + m^2} \left(\frac{h_k}{b}\right)^3 + (10m^2 - 4m\sqrt{1 + m^2}) \left(\frac{h_k}{b}\right)^2 + (10m - 6\sqrt{1 + m^2}) \left(\frac{h_k}{b}\right) + 1 \end{aligned} \quad (4)$$

边坡系数  $m$  为函数(4)式中的参数, 显然  $m=0$  时为矩形. (4)式的自变量  $h_k/b$  的取值范围暂取为  $h_k/b \in (0, 1.0]$ . 现探讨不同  $m$  值时(4)式的规律.

令:  $\alpha = 4m^2 \sqrt{1 + m^2}$ ,  $b = 10m^2 - 4m\sqrt{1 + m^2}$ ,  $c = 10m - 6\sqrt{1 + m^2}$ , 则(4)式可简化为:

$$f\left(\frac{h_k}{b}, m\right) = a\left(\frac{h_k}{b}\right)^3 + b\left(\frac{h_k}{b}\right)^2 + c\left(\frac{h_k}{b}\right) + 1 \quad (5)$$

系数  $a, b, c$  均随  $m$  的增大而增大, 且恒有  $a>0$ , 则  $f(h_k/b, m)$  是随  $m$  的增大而增大. 经分析, 当  $m \geq 0.75$  时,  $a, b, c$  均大于零, 则  $f(h_k/b)$  随  $h_k/b$  的增大而增大(即单调递增), 因此恒有  $f(h_k/b) > 1$ .

经进一步分析, 随  $m$  的变化, (4)式的函数图形变化规律见图1. 由图1可见, 随着  $m$  的增大, 函数图形与横轴的交点值  $\xi_m$  ( $f(\xi_m, m) = 0$ ) 逐渐增大, 当  $m$  增大到某一值  $m'$  时, 函数图形刚好与横轴相切, 若继续增大, 则函数图形位于横轴上方. 现要分析确定  $m'$  值, 即(4)式的曲线刚好与横轴相切时  $m$  的大小.

将(5)式对  $h_k/b$  求导得:

$$\frac{\partial f}{\partial (h_k/b)} = 3a(h_k/b)^2 + 2b(h_k/b) + c \quad (6)$$

令(6)式和(4)式同时为零, 联合求解得  $m' = 0.4664$ , 即  $m' = 0.4664$  时(4)式的曲线与横轴相切. 当  $m' > 0.4664$  时, 在  $h_k/b \in (0, 1.0]$  内函数  $f(h_k/b) > 0$ .

因此, 只有  $m \leq 0.4664$  时, (4)式在  $h_k/b \in (0, 1.0]$  范围内才有零点值  $\xi_m$ , 即  $i_k = f(h_k)$  才有驻点( $h_k/b =$

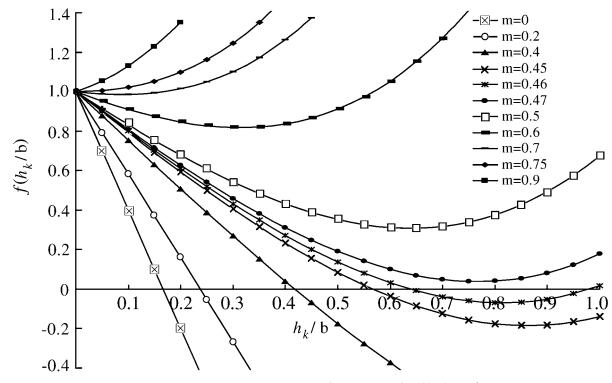


图1  $f(h_k/b, m)$  随  $m$  的变化规律

Fig. 1 Variations of  $f(h_k/b, m)$  with  $m$

$\xi_m$ ), 当  $h_k/b < \xi_m$  时,  $f(h_k/b, m) > 0$ ,  $di_k/dh_k < 0$ ,  $i_k = f(h_k)$  为减函数; 当  $h_k/b > \xi_m$  时,  $f(h_k/b, m) < 0$ ,  $di_k/dh_k > 0$ ,  $i_k = f(h_k)$  为增函数. 故当  $m < 0.4664$  时, 函数  $i_k = f(h_k)$  存在极小值, 也是最小值, 极值点为图 1 中图形与横轴的交点值  $h_k/b = \xi_m$ , 最小值为:

$$(i_k)_{\min} = \frac{n^2 g}{ab^{1/3}} \frac{(1 + 2\sqrt{1 + m^2}\xi_m)^{4/3}}{[(1 + m\xi_m)\xi_m]^{1/3}(1 + 2m\xi_m)} \quad (7)$$

设与  $\xi_m$  对应的单宽流量为  $q_m$ , 则有: 当  $q < q_m$  时,  $i_k = f(q)$  为减函数; 当  $q > q_m$  时,  $i_k = f(q)$  为增函数; 故当  $q = q_m$  时,  $i_k$  取得最小值  $(i_k)_{\min}$ .  $i_k = f(q)$  的示意图见图 2.

特别地, 当  $m=0$  时为矩形断面, 此时  $\xi_m = 1/6$ , 相应  $q_m = \frac{b}{6} \sqrt{\frac{gb}{6\alpha}}$ , 其最小值

$$(i_k)_{\min} = \frac{8gn^2}{3\alpha b^{1/3}} = 26.16 \frac{n^2}{b^{1/3}} \quad (8)$$

与韩梅<sup>[10]</sup>的研究成果一致.

因此, 当  $m \leq 0.4664$  时, 可用渠道的底坡  $i$  与  $(i_k)_{\min}$  相比较得到如下结论:

- (1)  $i < (i_k)_{\min}$ , 渠道中的均匀流永远是缓流;
- (2)  $i > (i_k)_{\min}$ , 渠道中的均匀流随着流量的变化可能出现缓流、急流和临界流. 由图 2 可见, 若令  $i_k = i$ , 则有 2 个流量与之对应, 分别令其为  $q_1$  和  $q_2$ , 当  $q_1 < q < q_2$  时, 实际临界底坡  $i_k < i$ , 出现急流; 当  $q = q_1$  或  $q = q_2$  时, 实际临界底坡  $i_k = i$ , 出现临界流; 当  $q < q_1$  或  $q > q_2$  时, 实际临界底坡  $i_k > i$ , 出现缓流;
- (3)  $i = (i_k)_{\min}$ , 渠道中的均匀流随着流量的变化可能出现缓流和临界流, 但不出现急流. 若  $q = q_m$ , 则  $i_k = (i_k)_{\min} = i$ , 出现临界流; 若  $q \neq q_m$ , 则  $i_k > (i_k)_{\min} = i$ , 出现缓流.

而当  $m > 0.4664$  时, 恒有  $f(h_k/b) > 0$ , 则  $di_k/dh_k < 0$ , 故  $i_k = f(h_k)$  为单调递减函数, 则  $i_k = f(q)$  也为单调递减函数,  $i_k = f(q)$  的示意图见图 3. 求出临界底坡与实际底坡值相等时对应的临界底坡  $i_0$  和临界单宽流量  $q_0$ , 若实际单宽流量  $q < q_0$ , 则有  $i_k > i$ , 故水流为缓流; 若  $q = q_0$ , 则有  $i_k = i$ , 故水流为临界流; 若  $q > q_0$ , 则有  $i_k < i$ , 故水流为急流.

## 2 示例分析

某长直棱柱体排水明渠, 底宽为 10 m, 边坡系数为  $m$ , 渠道粗糙系数为 0.022, 设计底坡为  $i$ , 现探讨不同边坡系数及不同底坡下渠道中水流流态随流量的变化规律.

### 2.1 $m \leq 0.4664$ 时

当  $m=0$  时, 矩形临界底坡  $i_k$  的最小值由(8)式计算得  $(i_k)_{\min} = 5.88\%$ , 最小底坡时的临界水深  $h_k = 1.67$  m, 单宽流量  $q = 6.74 \text{ m}^3/\text{s}$ .

若渠道实际底坡  $i < (i_k)_{\min} = 5.88\%$ , 则渠道中水流永远是缓流; 若实际底坡  $i > (i_k)_{\min}$ , 不妨令  $i = 6.0\%$ , 则令  $i_k = i = 6.0\%$ , 则与之对应的 2 个临界水深分别为 1.08 和 2.49 m, 流量  $q_1$  和  $q_2$  分别为 3.52 和 12.3  $\text{m}^3/\text{s}$ . 设渠道中的流量为  $q$ , 故当  $3.52 \text{ m}^3/\text{s} < q < 12.3 \text{ m}^3/\text{s}$  时, 渠道中水流为急流; 当  $q = 3.52 \text{ m}^3/\text{s}$  或  $q = 12.3 \text{ m}^3/\text{s}$  时, 渠道中水流为临界流; 当  $q < 3.52 \text{ m}^3/\text{s}$  或  $q > 12.3 \text{ m}^3/\text{s}$  时, 出现缓流.

当  $0 < m \leq 0.4664$  时, 不妨令  $m=0.2$ , 经计算  $\xi_m = 0.238$ , 即  $h_k = 0.238b = 2.38 \text{ m}$ , 对应的单宽流量  $q_m =$

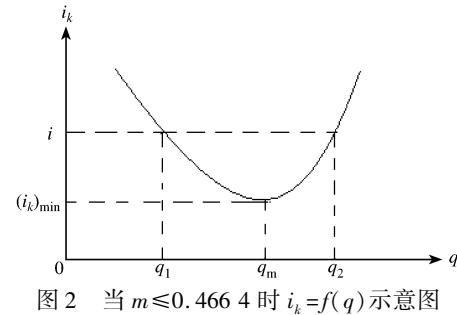


图 2 当  $m \leq 0.4664$  时  $i_k = f(q)$  示意图

Fig. 2 Sketch map of  $i_k$  varying with  $q$  when  $m \leq 0.4664$

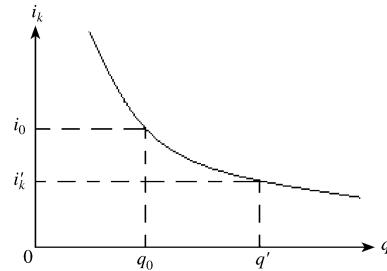


图 3  $m > 0.4664$  时  $i_k = f(q)$  示意图

Fig. 3 Sketch map of  $i_k$  varying with  $q$  when  $m > 0.4664$

11.78 m<sup>3</sup>/s, 此时  $i_k = f(h_k)$  取最小值, 由(7)式得  $(i_k)_{\min} = 5.42\%$ 。同理, 若渠道实际底坡  $i < (i_k)_{\min} = 5.42\%$ , 则渠道中水流永远是缓流; 若实际底坡  $i > (i_k)_{\min}$ , 同样令  $i = 6.0\%$ , 则令  $i_k = i = 6.0\%$ , 与之对应的2个临界水深分别为0.82和6.65m, 流量  $q_1$  和  $q_2$  分别为2.35和57.6 m<sup>3</sup>/s。设渠道中的流量为  $q$ , 故当  $2.35 \text{ m}^3/\text{s} < q < 57.6 \text{ m}^3/\text{s}$  时, 渠道中水流为急流; 当  $q = 2.35 \text{ m}^3/\text{s}$  或  $q = 57.6 \text{ m}^3/\text{s}$  时, 渠道中水流为临界流; 当  $q < 2.35 \text{ m}^3/\text{s}$  或  $q > 57.6 \text{ m}^3/\text{s}$  时, 出现缓流。

## 2.2 $m > 0.4664$ 时

$i_k = f(h_k)$  和  $i_k = f(q)$  时,  $i_k = f(q)$  均为单调递减函数。不妨以边坡系数  $m = 1.5$ , 实际底坡  $i = 6.0\%$  为例, 令  $i_k = i = 6.0\%$ , 由(3)式得  $h_k = 0.62 \text{ m}$ , 相应单宽流量  $q_0 = 1.56 \text{ m}^3/\text{s}$ , 若实际单宽流量  $q < 1.56 \text{ m}^3/\text{s}$ , 则水流为缓流; 若  $q = 1.56 \text{ m}^3/\text{s}$ , 则水流为临界流; 若  $q > 1.56 \text{ m}^3/\text{s}$ , 则水流为急流。

计算了多组不同边坡系数  $m$  和不同底坡  $i$  下的流态, 结果表明, 相同渠底宽度和河床糙率情况下, 渠道的最小临界底坡随  $m$  的增大而减小, 而相应于最小临界底坡时的临界水深和流量, 则随边坡系数  $m$  的增大而迅速增大; 同一底坡时急流态的流量区间随边坡系数  $m$  的增大而增大, 不过, 当  $m \leq 0.4664$  时, 某一底坡条件下可能始终是缓流; 同一边坡系数  $m$  条件下, 急流态的流量区间随渠道底坡的增大而增大, 但当  $m \leq 0.4664$  时, 若渠道底坡小于最小临界底坡, 则渠道水流始终是缓流, 不存在急流态。

## 3 结语

分析研究梯形棱柱体渠道临界底坡随流量的变化特征, 得出了棱柱体渠道水流流态随流量的变化规律:

- (1) 当边坡系数  $m \leq 0.4664$  ( $m=0$  时为矩形) 时, 渠道存在着临界底坡的极小值(也是最小值)  $(i_k)_{\min}$ , 且  $(i_k)_{\min}$  随  $m$  的增大而减小, 而相应于  $(i_k)_{\min}$  的临界水深和流量随边坡系数  $m$  的增大而迅速增大;
- (2) 当边坡系数  $m > 0.4664$  时,  $i_k = f(q)$  为单调递减函数, 令临界底坡等于实际底坡时对应的单宽流量为  $q_0$ , 若实际单宽流量  $q < q_0$ , 则有  $i_k > i$ , 故水流为缓流; 若  $q = q_0$ , 则有  $i_k = i$ , 故水流为临界流; 若  $q > q_0$ , 则有  $i_k < i$ , 故水流为急流;
- (3) 如果把缓流看作急流态流量为零的区间, 则同一底坡下急流态的流量区间随边坡系数  $m$  的增大而增大; 同一边坡系数  $m$  下, 急流态的流量区间随渠道底坡的增大而增大。

## 参 考 文 献:

- [1] 吴持恭. 水力学(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. (WU Chi-gong. Hydraulics (Version 3) [M]. Beijing: Higher Education Publisher, 2003. (in Chinese))
- [2] 杨永全, 汝树勋, 张道成. 工程水力学[M]. 北京: 中国环境科学出版社, 2005. (YANG Yong-quan, RU Shu-xun, ZHANG Dao-cheng. Engineering Hydraulics [M]. Beijing: Chinese Environmental Science Publisher, 2005. (in Chinese))
- [3] 葛节忠, 王成现. 几个常用断面明渠均匀流水深和临界水深的迭代法[J]. 华北水利水电学报, 2006, 27(4): 33–36. (GE Jie-zhong, WANG Cheng-xian. On iteration algorithms of uniform flow depth and critical water depth in open channels [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2006, 27(4): 33–36. (in Chinese))
- [4] 许延生, 王楠楠, 赵明雁. 矩形明渠均匀流水深及底宽的渐近耦合算法[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2001, 23(2): 109–111. (XU Yan-sheng, WANG Nan-nan, ZHAO Ming-yan. Asymptotic coupling algorithm for water depth and bed width of uniform flow in rectangular open channels [J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences), 2001, 23(2): 109–111. (in Chinese))
- [5] SRIVASTAVA, RAJESH. Exact solutions for normal depth problem[J]. Journal of Hydraulic Research, 2006(3): 427–428.
- [6] 王正中, 陈涛, 万斌, 等. 明渠临界水深计算方法总论[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2006, 34(1): 155–161. (WANG Zheng-zhong, CHEN Tao, WAN Bin, et al. Pandect for the calculating methods of the critical depth of opening channel in different typical cross sections [J]. Journal of Northwest Science-Technology University of Agriculture and

- Forest (Natural Sciences), 2006, 34(1): 155–161. (in Chinese))
- [7] 赵延风, 张宽地, 芦 琴. 矩形断面明渠均匀流水力计算的直接计算公式[J]. 西北农林科技大学学报, 2008, 36(9): 224–228. (ZHAO Yan-feng, ZHANG Kuan-di, LU Qin. Formula on direct calculation of water depth of uniform flow in rectangular open channel [J]. Journal of Northwest Science and Technology University of Agriculture and Forest (Natural Sciences), 2008, 36(9): 224-228. (in Chinese))
- [8] 熊宜福. 梯形明渠均匀流水深和底宽的简捷计算法[J]. 长江职工大学学报, 2004, 20(3): 24,29. (XIONG Yi-fu. Shortcut calculation of the depth and bottom width of uniform flow in ladder-shaped open canal [J]. Journal of Changjiang Vocational University, 2004, 20(3): 24,29. (in Chinese))
- [9] 李大美, 张申泽. 临界底坡的水面曲线分析[J]. 水电能源科学, 2000, 18(4): 44–45, 58. (LI Da-mei, ZHANG Shen-ze. Analysis of flow profiles on critical slope[J]. Journal of Hydroelectric Energy, 2000, 18(4): 44–45, 58. (in Chnese))
- [10] 韩 梅. 棱柱体渠道临界底坡变化规律及最小值研究[J]. 黑龙江水专学报, 2004, 31(3): 4–6. (HAN Mei. Research on critical bed slope varied rule and the mini value in the prism canal [J]. Journal of Heilongjiang Hydraulic Engineering College, 2004, 31(3): 4–6. (in Chinese))
- [11] 史俊贤. 高等数学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2005. (SHI Jun-xian. High athematics [M]. Dalian: Dalian University of Science and Engineering Publisher, 2005. (in Chinese))

## Variation in flow pattern with unit width discharge in the prism canal with trapezia section

LIU Zeng-mei<sup>1</sup>, WU Jun-xiao<sup>2</sup>

(1. Department of Water Conservancy and Hydropower Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. Guangdong Province Water Conservancy and Hydropower Engineering Center for Supervision in Construction, Guangzhou 510600, China)

**Abstract:** According to the theoretical analysis, this paper reveals the function characteristic of critical bed slope  $i_k$  varying with unit width discharge  $q$  in the prism canal with trapezia section, and analyzes the variation in flow pattern with the unit width discharge. Moreover, by the case studies, the results show that the canal exists the minimum critical bed slope  $(i_k)_{\min}$  when the slope coefficient  $m$  is no more than 0.4664, which will diminish while  $m$  increases, and the variation in flow pattern with the unit width discharge  $q$  in the canal can be determined by comparing the actual bed slope  $i$  with  $(i_k)_{\min}$  of the canal; When the slope coefficient  $m$  is more than 0.4664, the critical bed slope will diminish while the unit width discharge  $q$  increases, and the variation in flow pattern can be determined by comparing the actual unit width discharge with the unit width discharge which is corresponding to the critical bed slop equaling the actual bed slope.

**Key words:** prism canal; trapezia section; flow pattern; critical bed slope; unit width discharge; variation