

基于修正 Roe 格式的有限体积法求解二维浅水方程

刘 刚, 金 生

(大连理工大学 海岸及近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 应用迎风有限体积法, 对具有复杂地形的二维浅水方程进行数值模拟. 基于非结构化网格, 采用 Roe 格式的近似 Riemann 解计算非粘性界面通量. 底坡源项采用简单的斜底模型离散, 从而保证了地形的离散精度. 为了保证该计算格式的压力项和底坡源项的和谐性, 对经典的 Roe 格式计算数值通量中的静水压力项进行了修正, 并证明了修正后的 Roe 格式具备和谐性. 通过与超临界流倾斜水跃和有激波混合流算例理论解结果比较, 验证了该模型具有良好的间断捕捉能力、计算稳定性和守恒性.

关 键 词: 二维浅水方程; Roe 格式; 有限体积; 源项

中图分类号: TV131.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-640X(2009)03-0029-05

浅水流动模拟广泛应用于湖泊、河道、河口和海洋水流的计算中, 为防洪规划、河道整治、海洋开发等提供科学依据. 利用 Godunov 格式求解二维浅水方程, 研究较多的是 Roe 的近似 Riemann 解的方法^[1-7]. 在平底和无摩阻的情况下, 以经典的 Roe 方法能较好地求解强间断流和大梯度流问题^[2], 但在非平底情况下, 经典的 Roe 方法不具有“和谐性”, 即不能保持静止. 许多学者在求解二维浅水方程时, 为保证格式的和谐性, 对底坡源项的离散采用了诸多处理技术^[7-10], 如潘存鸿等^[8-10]在三角形网格下建立了求解二维浅水流动方程, 应用准确 Riemann 解求解法向数值通量, 采用特殊的源项处理方式计算浅水方程, 从而保持了和谐性.

本文在文献[11]的基础上, 对非平底地形下以修正 Roe 方法的近似 Riemann 解为基础的 Godunov 格式求解二维浅水方程, 保持了格式的和谐性. 通过算例证明本文提出的方法是和谐的, 具有良好的间断捕捉能力、计算稳定性和守恒性.

1 控 制 方 程

对于平面大范围的自由表面流动, 水深尺度远小于平面尺度、无明显垂直环流、垂向流速小的浅水流动, 可以引入静水压力假设, 并沿水深方向进行积分来简化方程, 即为二维浅水方程. 不考虑科氏力和风力时的守恒型二维浅水方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (1)$$

$$\text{式中: } U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{gh^2}{2} \\ uvh \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, S = S_0 + S_f = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix}, S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x}, S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \text{其中: } h \text{ 为水深; } u, v \text{ 分别为 } x, y \text{ 方向的流速; } g \text{ 为重力加速度; } S_{0x}, S_{0y} \text{ 分}$$

收稿日期: 2008-10-05

作者简介: 刘 刚(1982-), 男, 辽宁铁岭人, 硕士, 主要从事计算水力学研究. E-mail: lg1208@163.com

别为 x, y 方向的底坡源项; S_{fx}, S_{fy} 分别为 x, y 方向的底摩擦源项; n 为糙率; z 为河底高程.

2 有限体积法数值离散

本文采用 CC 方式的有限体积法离散控制方程. 取任意三角形单元为控制体, 对 (1) 式应用有限体积方法离散, 并利用格林公式, 则有

$$\int_{A_i} \frac{\partial U}{\partial t} dA + \oint_{\Gamma_i} F \cdot n d\Gamma = \int_{A_i} S dA \quad (2)$$

式中: A_i 为 i 单元的三角形面积; $F = (E, G)$; Γ_i 为 i 控制体的边界; n 为边界的外法线方向.

应用中点求积公式可得

$$\frac{dU_i}{dt} = - \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^3 F^* \cdot n_{ij} l_{ij} + S_i \quad (3)$$

式中: F^* 为通过 i 单元的 j 条边的数值通量; l_{ij} 为 i 单元 j 条边的长度.

本文采用改进的 Roe 格式近似 Riemann 解计算界面数值通量 F^* .

3 Roe 格式的近似 Riemann 解

经典的 Roe 格式的近似 Riemann 解最早由 Roe 提出, 通过界面的数值通量求解可参见文献[2],

$$F^* = \frac{1}{2} [F_R + F_L - \sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}^k |\tilde{\lambda}^k| \tilde{e}^k] \quad (4)$$

式中: $\{\tilde{\lambda}^k, k=1, 2, 3\}$ 和 $\{\tilde{e}^k, k=1, 2, 3\}$ 分别为特征值和特征向量, $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c}$; $\tilde{\lambda}^2 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y$; $\tilde{\lambda}^3 = \tilde{u}n_x$

+ $\tilde{v}n_y - \tilde{c}$; $\tilde{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix}$; $\tilde{e}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix}$; $\tilde{e}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix}$; 系数 $\tilde{\alpha}^{1,3} = \frac{h_R - h_L}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}} [((hu)_R - (hu)_L)n_x + ((hv)_R - (hv)_L)n_y - (\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y)(h_R - h_L)]$, $\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{\tilde{c}} [((hv)_R - (hv)_L - \tilde{v}(h_R - h_L))n_x - ((hu)_R - (hu)_L - \tilde{u}(h_R - h_L))n_y]$.

Roe 的平均值为 $\tilde{u} = \frac{u_R \sqrt{h_R} + u_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}$; $\tilde{v} = \frac{v_R \sqrt{h_R} + v_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}$; $\tilde{c} = \sqrt{\frac{g}{2}(h_R + h_L)}$.

为使特征值满足熵条件, 参见文献[2]的处理方法. 在平底条件下, 经典的 Roe 格式可直接应用于二维浅水计算^[1]. 在非平底的静水条件下和底坡源项采用简单的斜底坡模型离散的方式下, 经典的 Roe 格式不具有和谐性, 即在静水条件下, 不能保持流速为零和水位为常数的精确解. 为了使格式具有“和谐性”, Farshi^[12]提出对数值通量中的静水压力项进行如下修正

$$\frac{1}{2}gh^2 = \frac{1}{2}gh_{ep}^2 = \frac{1}{2}g \frac{h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2}{3} \quad (5)$$

式中: h_1, h_2 为三角形单元每条边两个端点的水深值.

值得注意的是, 在平底条件下, 按照 (5) 式计算数值通量, 修正的 Roe 格式就应转化为经典的 Roe 格式.

4 源项的处理

在复杂地形下, 源项的处理对计算格式的精度和稳定性有着重要影响. 源项包括底坡源项和底摩阻源项, 本文只考虑底坡源项的影响. 由于采用三角形网格, 三角形单元的 3 个节点确定一个平面, 该平面的方程

可以表示为

$$z = c_1 x + c_2 y + c_3 \quad (6)$$

式中: z 为底高程; c_1, c_2 和 c_3 为常数. 已知三角形单元 3 个节点的底高程, 通过 (6) 式可计算得 c_1, c_2 和 c_3 . 故底坡源项可按式计算

$$(S_{0x}, S_{0y}) = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y} \right) = (-c_1, -c_2) \quad (7)$$

$$S_0 = [0 \quad -gh^* c_1 \quad -gh^* c_2]^T \quad (8)$$

式中: $h^* = (h_1 + h_2 + h_3)/3$, h_1, h_2, h_3 为三角形单元 3 个节点的水深.

5 算例验证

[算例 1] 超临界流倾斜水跃问题 这是一个有精确解的二维间断问题, 常用来检验计算格式性能和分辨率^[12]. 模型的计算域为一长 40 m 的平底矩形河道, 上游河宽 30 m, 但在河道一边 10 m 处以角度 $\alpha = 8.95^\circ$ 开始收缩, 计算域采用 2 683 个三角形网格 (见图 1). 超临界流和河岸的相互作用会形成一角度为 β 的水跃, 计算初始条件为水深 $h_0 = 1$ m, x 方向流速 $u_0 = 8.57$ m/s, y 方向流速 $v_0 = 0$. 固壁采用无穿透边界条件.

给定边界条件下的精确解为: 形成一个稳定状态的超临界流, 流域内被一个水跃分为两部分, 水跃和来流方向的夹角为 $\beta = 30^\circ$, 水跃的水深为 $h_0 = 1.5$ m, 流速为 $|U| = 7.955 6$ m/s. 本文格式计算的水跃和来流方向的夹角为 $\beta = 30^\circ$, 水跃水深为 $h = 1.5$ m, 流速为 $|U| = 7.983 7$ m/s (见图 2). 可见, 本文计算格式的性能和分辨率都较好, 满足精度要求.

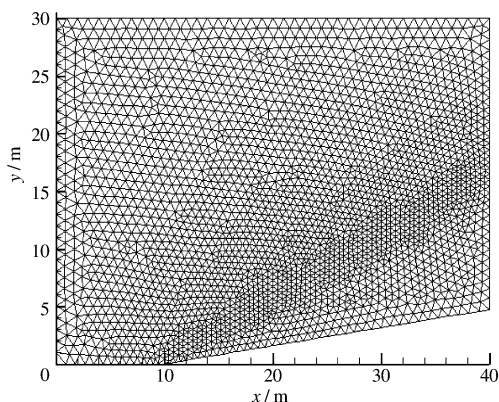


图1 计算网格

Fig. 1 Computation grids

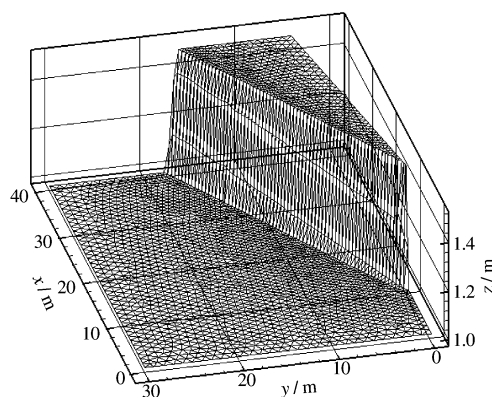


图2 斜水跃水位图

Fig. 2 Water surface profile

[算例 2] 混合流问题 计算模型为长 25 m, 宽 10 m 的矩形渠道, 渠底高程为

$$Z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & 8 < x < 12 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

此模型为模拟间断流溃坝问题, 并且具有精确数值解^[11,13]. 本算例用于验证计算格式在超临界流中捕捉激波的能力. 计算域有 5 292 个三角形单元, 分 3 种边界条件^[14] 计算: (1) 恒定流计算, 给定初始水位 $H = 0.5$ m, x, y 向流速均为零. 计算结果是水位保持不变, 仍然是静水, 验证了本文所采用的计算格式具备和谐性; (2) 有激波混合流计算, 上游边界给定单宽流量为 $hu = 0.18$ m³/s/m, 下游边界给定水深 $h = 0.33$ m. 计算结果与解析解的比较见图 3; (3) 无激波混合流计算, 上游边界给定单宽流量为 $hu = 1.53$ m³/s/m, 当下游边界为亚临界流时, 给定下游边界水位 $h = 0.66$ m. 计算结果与解析解的比较见图 4.

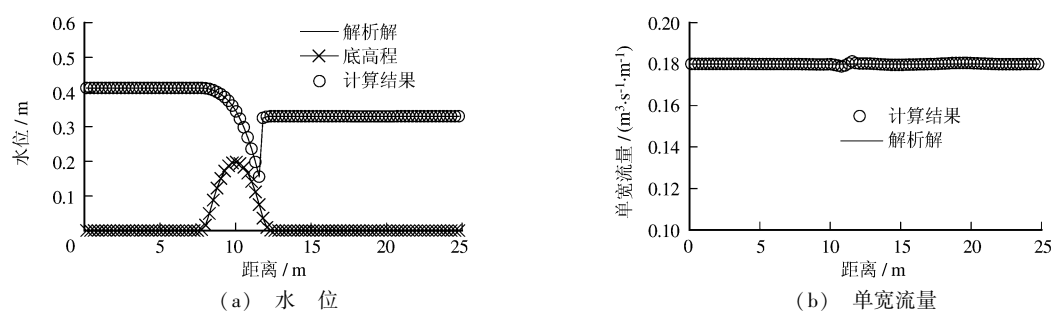


图 3 有激波混合流水位及单宽流量验证

Fig. 3 Verification of water surface elevation and unit width discharge of transcritical flow with a shock

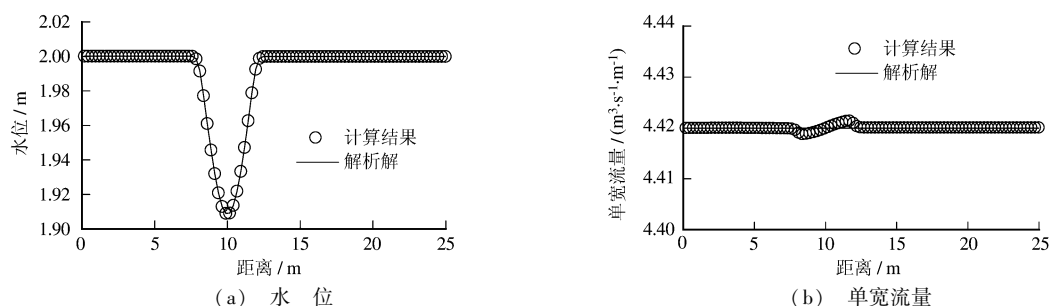


图 4 无激波混合流水位及单宽流量验证

Fig. 4 Verification of water surface elevation and unit width discharge of transcritical flow without a shock

6 结 语

本文采用斜底坡处理底坡源项,保证了地形离散精度. 为了保证计算格式的和谐性,把 Roe 格式计算的数值通量中的静水压力项 $\frac{1}{2}gh^2$ 修正为 $\frac{1}{2}gh_{ep}^2$. 通过超临界流倾斜水跃和有激波混合流问题的计算算例,验证了该方法具有高精度捕捉间断的能力及和谐性.

参 考 文 献:

- [1] BRUFAU P, GARCIA P, VAZQUEZ-CENDON M E. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2004, 45(10): 1047-1082.
- [2] MURILLO J, BURGUETE J, BRUFAU P, et al. Coupling between shallow water and solute flow equations: analysis and management of source terms in 2D[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005, 49(3): 267-299.
- [3] WANG Zhi-li, GENG Yan-fen, JIN Sheng. An unstructured finite-volume algorithm for nonlinear two-dimensional shallow water equation[J]. Journal of Hydrodynamics, 2005, 17(3): 306-312.
- [4] BRUFAU P, GARCIA-NAVARRO P. Unsteady free surface flow simulation over complex topography with a multidimensional upwind technique[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 186(2): 503-526.
- [5] SLEIGH P A, GASKELL P H. An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries[J]. Computers & Fluids, 1998, 27(4): 479-508.
- [6] MESELHE E A, HOLLY F M. Simulation of unsteady flow in irrigation canals with a dry bed[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1993, 119(9): 1021-1039.
- [7] 王志力, 耿艳芬, 金 生. 具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟[J]. 水利学报, 2005, 36(4): 439-444.

- (WANG Zhi-li, GENG Yan-fen, JIN Sheng . Numerical modeling of 2-D shallow water flow with complicated geometry and topography[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(4): 439–444. (in Chinese))
- [8] PAN Cun-hong. Numerical simulation for 2D shallow water equations by using Godunov-type scheme with unstructured mesh[J]. Journal of Hydrodynamics(Ser A), 2006, 18(4): 475–480.
- [9] 潘存鸿, 徐 昆. 三角形网格下求解二维浅水方程的 KFVS 格式[J]. 水利学报, 2006, 37(7): 858–864. (PAN Cun-hong, XU Kun. Kinetic flux vector splitting scheme for solving 2-D shallow water equations with triangular mesh[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006, 37(7): 858–864. (in Chinese))
- [10] 潘存鸿. 三角形网格下求解二维浅水方程的和谐 Godunov 格式[J]. 水科学进展, 2007, 18(2): 204–209. (PAN Cun-hong . Well-balanced Godunov-type scheme for 2D shallow water flow with triangle mesh[J]. Advances in Water Science, 2007, 18(2): 204–209. (in Chinese))
- [11] 艾丛芳, 金 生. 基于三角形网格求解二维浅水方程的改进的 HLL 方法[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 2007, 22(6): 723–729. (AI Cong-fang, JIN Sheng. Application of improved HLL scheme for 2D shallow water equations with triangular meshes[J]. Journal of Hydrodynamics(Ser. A), 2007, 22(6): 723–729 . (in Chinese))
- [12] CHIPPA S, DAWSON CN, MARTINEZ M L, et al. A Godunov-type finite volume method for the system of shallow water equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 151: 105–129.
- [13] 潘存鸿, 林炳尧, 毛献忠. 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解[J]. 水科学进展, 2003, 14(4): 430–436. (PAN Cun-hong, LIN Bing-yao, MAO Xian-zhong. A Godunov-type scheme for 1-D shallow-water flow with uneven bottom[J]. Advances in Water Science, 2003, 14(4): 430–436. (in Chinese))
- [14] GOUTAL N, MAUREL F. Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation[R]. France: Department Laboration National Hydraulique, 1997.

Finite volume model for the 2D shallow water equations using modified Roe scheme

LIU Gang , JIN Sheng

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A numerical model for finite volume method is developed for two-dimensional shallow-water flow with complicated geometry and topography. Based on the unstructured grid, the Roe's approximate Riemann solver is used for the computation of inviscid numerical flux functions. The bed slope source terms are computed by three vertices bottom value of a triangle lie on the same plane. Therefore, the discrete accuracy of landform is guaranteed. In order to balance the pressure terms with the bed slope source term for arbitrary geometry with triangular mesh, the classical Roe scheme is improved. The improved Roe scheme is confirmed to be well balanced by algebraic manipulation. The validity of the proposed modeling method is verified by the oblique shock wave and the transcritical flow with a shock numerical example.

Key words: 2D shallow water equation; Roe scheme; finite volume; source term