

含侧向入流一维不平衡输沙方程解法的改进

王党伟¹, 杨国录¹, 王敏¹, 赵远峰²

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 沈阳市水利建筑勘测设计院, 辽宁 沈阳 110015)

摘要: 针对含侧向入流河段的水流泥沙运动特点, 在传统方法的基础上给出了一种新的不平衡输沙方程的计算模式, 进而建立了一维恒定不平衡输沙数学模型, 并用于白鹤滩水库冲淤计算. 比较两种不平衡输沙计算模式的结果表明, 支流入汇口上下断面形态差别较小时, 两种处理方法得到的河床变形基本一致; 支流入汇口上下断面形态变化较为剧烈的河段, 改进后处理方法的计算结果较好, 且符合物理规律, 而传统方法计算结果明显违背定性分析结果.

关键词: 汇流; 不平衡输沙方程; 数学模型

中图分类号: TV142

文献标识码: A

文章编号: 1009-640X(2009)02-0009-06

河流是水流与河床相互作用的产物, 水流作用改造河床, 河床又制约影响水流, 两者以泥沙为媒介相互作用, 形成各种各样的河道形态. 近十多年来发展起来的河流泥沙数学模型正是一种量化河床变形的工具, 与实体物理模型相得益彰, 能够迅速经济地为解决实际工程问题提供可靠的设计依据^[1]. 河流泥沙数学模型主要包括水流模型和泥沙模型. 目前, 针对水流模拟的方法层出不穷, 已有很多较为成熟的算法, 如较早出现的特征线法, 近年来研究较多的 TVD、ENO 等方法^[2-5]. 而对于河流泥沙数学模型中难点之一的泥沙模型的解法及处理技术的研究报道相对较少. 故针对泥沙模型的研究和探讨是进一步完善河流泥沙数学模型的关键所在.

本文针对采用一维泥沙数学模型计算含支流河段的河床变形时, 支流入汇口下游出现的河床突变问题, 提出一种改进的不平衡输沙计算方法, 使改进后的数学模型计算的河床变形更加符合河道演变规律.

1 一维恒定流河流泥沙数学模型

一维非耦合求解恒定非饱和输沙模型的主要假设条件有: ①将非恒定流作为恒定流处理, 这种作法在洪峰比较平缓的条件下是允许的; ②河床冲淤过程中, 每一个短时段内河床变形对水流条件影响不大; ③不考虑河段内水体中悬沙的槽蓄量因时而变. 基本方程有:

$$\text{水流连续方程: } \frac{\partial Q}{\partial x} = q_1 \quad (1)$$

$$\text{运动方程: } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gAJ_f = 0 \quad (2)$$

$$\text{悬移质不平衡输沙方程: } \frac{\partial (QS_k)}{\partial x} = -\alpha\omega_k B(S_k - S_{*k}) + q_s \quad (3)$$

收稿日期: 2008-08-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772137), 国家“973”项目(2003BC415200)

作者简介: 王党伟(1982-), 男, 陕西乾县人, 博士研究生, 主要从事河流数值模拟研究. E-mail: wangku-03@163.com

$$\text{推移质不平衡输沙方程: } \frac{\partial G_k}{\partial x} = -K_G(G_k - G_{*k}) + q_g \quad (4)$$

$$\text{河床变形方程: } \gamma' \frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{\partial(QS)}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\text{床沙组成方程: } \gamma' \frac{\partial(E_m P_k)}{\partial t} + \frac{\partial(QS_k)}{\partial x} + \frac{\partial G_k}{\partial x} + \varepsilon_1[\varepsilon_2 P_{ok} + (1 - \varepsilon_2)P_k] \left(\frac{\partial Z_x}{\partial t} - \frac{\partial E_m}{\partial t} \right) B = 0 \quad (6)$$

式中: Q 为流量; A 为过流面积; A_s 为河床变形面积; B 为河宽; Z 为水位; J_f 为能坡; q_1 为侧向单位河长入流量; q_s 为单位长度上侧向入流的悬移质沙量; S_k 和 S_{*k} 分别为悬移质分组含沙量和水流挟沙力; G_k 和 G_{*k} 分别为推移质分组输沙率和有效输沙率; ω_k 为分组沙沉速; α 为恢复饱和系数; K_G 为推移质恢复饱和系数; P_k 为混合层床沙组成; P_{ok} 为天然河床床沙组成; E_m 为混合层厚度; ε_1 和 ε_2 为标记, 纯淤计算时 $\varepsilon_1 = 0$, 否则 $\varepsilon_1 = 1$, 当混合层下边界波及到原始河床时 $\varepsilon_2 = 1$, 否则 $\varepsilon_2 = 0$ ^[6]; K 为非均匀分组序数, 且满足 $S = \sum S_k, S_* = \sum S_{*k}, G = \sum G_k, G_* = \sum G_{*k}$.

除了上述控制方程外, 一维泥沙数学模型中还需要对很多参数及补充方程进行处理, 以便对控制方程进行封闭. 主要包括非均匀沙水流挟沙力 S_* , 非均匀沙推移质输沙率 G_* , 泥沙起悬条件等, 具体处理方法参见文献[7-9].

2 不平衡输沙方程处理方法

当河道中存在支流时, 相当于在不平衡输沙方程中加入了新的源项, 水流方程(圣维南方程)已有较为成熟的处理方法可供参考^[10,11], 如何对不平衡输沙方程进行适当处理是计算是否合理的关键所在. 不平衡输沙方程主要包括悬移质不平衡输沙方程和推移质不平衡输沙方程, 下面主要就悬移质不平衡输沙方程的解法进行分析比较, 推移质方程的解法与悬移质方程类似.

2.1 传统方法

在有支流的情况下, 传统方法将入汇口的干流上游断面与支流出口断面合并, 使之成为单一河道.

$$\text{基本方程: } \frac{\partial(QS)}{\partial x} = -\alpha\omega B(S - S_*) \quad (7)$$

基本假定: 流量 Q 在某一短时段中不变, 沿程也不发生变化; 取平均河宽 B 来计算单宽流量 $q = Q/B$, 近似认为 q 在短小河段内也不发生变化; 认为 S_* 以直线变化, 即 dS_{*k}/dx 为一常数.

$$(7) \text{式积分后, 得 } S_1 = S_{*1} + (S_0 - S_{*0})e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}} + (S_{*0} - S_{*1})\frac{q}{\alpha\omega\Delta x}(1 - e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}}) \quad (8)$$

设入汇口的干流上游断面用 0-0 表示, 支流出口断面用 c-c 表示, 两断面合并后的断面用 0'-0' 表示. 各水力、泥沙要素的合并方法如下:

$$S'_{*0} = \frac{Q_0 S_{*0} + Q_c S_{*c}}{Q'_0} \quad (9)$$

$$S'_0 = \frac{Q_0 S_0 + Q_c S_c}{Q'_0} \quad (10)$$

式中: S_{*0}, S_{*c}, S'_{*0} 分别为断面 0-0, c-c, 0'-0' 的水流挟沙力; S_0, S_c, S'_0 分别为相应断面的悬移质含沙量.

2.2 改进方法

改进方法采用分断面求解, 基本方程为

$$\frac{\partial(QS)}{\partial x} = -\alpha\omega B(S - S_*) + q_s \quad (11)$$

基本假定: (1) 入汇口上下两断面间的任一断面的河宽 B 、流量 Q 和水流挟沙力 S_* 成线性变化. 上断面水力

要素为 B_0, Q_0, S_{*0} ; 下断面水力要素为 B_1, Q_1, S_{*1} ; Δx 为干流入汇口上下两断面的间距. 则距上断面距离为 x 的断面的水力要素为:

$$B = B_0 + \frac{x}{\Delta x}(B_1 - B_0) \tag{12}$$

$$Q = Q_0 + \frac{x}{\Delta x}(Q_1 - Q_0) \tag{13}$$

$$S_* = S_{*0} + \frac{x}{\Delta x}(S_{*1} - S_{*0}) \tag{14}$$

(2) 支流出口断面的悬移质沙量在入汇口上下两断面间均匀分布, 即 $q_s = Q_{sc}/\Delta x$, 其中 Q_{sc} 为支流出口断面悬移质输沙量.

于是, 可以将(11)式写为:
$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha B \omega \right) S = \frac{1}{Q} (q_s + \alpha B \omega S_*) \tag{15}$$

这是一个标准的一阶线性常微分方程, 其通解为:

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int R e^{\int P dx} dx + C_1 \right) \tag{16}$$

式中: $y = S$; $P = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha B \omega \right)$; $R = \frac{1}{Q} (q_s + \alpha B \omega S_*)$.

由(16)式可得:
$$y e^{\int P dx} = \int R e^{\int P dx} dx + C_1 \tag{17}$$

当 $x = 0$ 时,
$$y_0 [e^{\int P dx}]_{x=0} = \left[\int R e^{\int P dx} \right]_{x=0} + C_1 \tag{18}$$

当 $x = \Delta x$ 时,
$$y [e^{\int P dx}]_{x=\Delta x} = \left[\int R e^{\int P dx} \right]_{x=\Delta x} + C_1 \tag{19}$$

由此可得下断面的含沙量表达式为:
$$S = S_0 e^{-\int_0^{\Delta x} P dx} + e^{-\int_0^{\Delta x} P dx} \int_0^{\Delta x} R e^{\int P dx} dx \tag{20}$$

对(20)式采用数值积分即可得到下断面的含沙量 S .

改进后不平衡输沙方程的处理方法采用的控制方程未经简化, 对于支流入汇量分布的处理比传统方法更合理. 传统方法将支流入汇口当作节点处理, 若支流入汇量比干流量还大, 就有可能在支流入汇口的下断面出现水量和沙量突变, 从而导致河床变形的严重失真. 而改进方法采用线性化的假设, 水量和沙量的分布较为连续, 在理论上较传统方法更加合理.

3 工程算例

白鹤滩水电工程位于云南省昭通市巧家县和四川省宁南县交界金沙江干流上, 下距溪洛渡水电站 192 km, 电站正常蓄水位 820 m, 相应库容 184.2 亿 m^3 , 死水位 760 m, 相应库容 82.0 亿 m^3 , 水库调节库容 102.2 亿 m^3 . 设计装机总容量为 18 000 MW. 库河段全长 195.59 km, 自然情况下水库平均比降为 1.28‰.

3.1 河道特性

白鹤滩库区包括金沙江干流和小江、黑水河两条支流, 天然情况下白鹤滩库区河道具有水面窄、水流深、坡降大、流速急的典型山区峡谷河道特征. 白鹤滩水库附近水系及支流上下游计算断面布置见图 1. 干支流河道特征值见表 1.

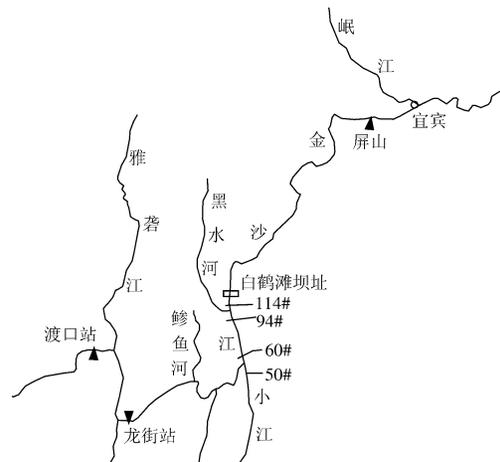


图1 金沙江白沙滩水库附近水系图
Fig. 1 Water system around the Baihetan Reservoir in Jinsha River

表 1 白鹤滩库区各河道特征值

Tab. 1 Characteristics of river channel in Baihetan reservoir

河 名	河段长度/ km	比降/ ‰	河底高程/ m		河 宽/ m		
			最 大	最 小	最 大	最 小	平 均
金沙江干流	195.59	1.28	824.02	573.00	4 166.26	77.72	971.71
小江支流	13.09	9.00	859.26	741.40	903.97	19.78	425.52
黑水河支流	31.07	6.25	840.87	646.70	1 366.94	22.17	450.58

3.2 计算结果及分析

采用上述非耦合恒定不平衡输沙模式进行计算,根据对不平衡输沙方程的处理方法分别建立模型 a 和 b.

3.2.1 含沙量 以白鹤滩库区为算例,比较两种不平衡输沙处理方法计算含支流河段上含沙量的差异,两种方法均采用相同的初始条件和边界条件.白鹤滩库区内有黑水河和小江两条支流.其中黑水河的入汇口下断面(114#)原始河宽为 667.94 m,而其上游断面(94#)原始河宽为 2 991.90 m,这是一个典型的河宽束窄且有支流入汇的例子;小江入汇口下断面(60#)原始河宽为 2 506.80 m,入汇口上游断面(50#)原始河宽为 1467.90 m,上下游断面河宽变化较小.断面布置见图 1.用两种方法计算得到的各支流上下游断面结果见表 2.两种方法采用相同的水力和泥沙要素.表中挟沙力及含沙量数据以第 5 组粒径泥沙(0.05 ~ 1 mm)为例.

表 2 黑水河入汇口上下游断面含沙量结果比较

Tab. 2 Comparison of sediment concentration at channel junction of Heishui River

断 面 编 号	流量 Q / ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)	河宽 B / m	过水面积 A / m^2	挟沙力 S^* / ($10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	含沙量 S / ($10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	
					传统方法	改进方法
94#	2 736.8	2 062.2	108 993.2	0.01	33.1	33.1
114#	2 769.6	234.2	8 598.4	27.3	28.1	34.9
94#	8 306.6	2 646.7	131 951.7	0.17	590	590
114#	8 367.3	378.5	11 328.7	631	582	612
94#	11 366.9	2 751.48	136 719.20	2.25	8 080	8 080
114#	11 640.9	393.28	11 625.33	9 220	7 990	8 130
50#	2 709.6	1 198.0	95 341.7	0.03	45.6	45.6
60#	2 736.8	1 350.2	96 848.5	0.05	43.3	43.9
50#	8 203.9	1 286.3	124 351.6	0.21	733	733
60#	8 306.6	1 569.6	128 933.9	0.23	598	611
50#	11 152.2	1 406.0	127 142.3	2.33	9 729	9 729
60#	11 366.9	1 799.8	129 357.9	2.29	8 798	8 860

注: 94#和 114#分别为黑水河入汇口上、下游断面;50#和 60#分别为小江入汇口上、下游断面.

由表 2 可见,两种方法计算的黑水河入汇口下断面(114#)含沙量差异较大.上断面(94#)含沙量为 $3.31 \times 10^{-4} \text{kg}/\text{m}^3$ 时,传统方法计算的下断面含沙量为 $2.81 \times 10^{-4} \text{kg}/\text{m}^3$,下断面含沙量小于上断面含沙量,河床淤积.而用改进方法计算的下断面含沙量为 $3.49 \times 10^{-4} \text{kg}/\text{m}^3$,下断面含沙量大于上断面,河床冲刷.两种方法的结果截然不同.两种方法计算的小江入汇口下断面(60#)与上断面(50#)含沙量均有所减小,下断面含沙量均小于上断面,河床淤积,符合理论规律,且两种情况的计算结果差别不大.由此可见,当入汇口上下游断面形态变化较小时,使用传统方法和改进方法均可得到符合物理规律的结果.

3.2.2 纵剖面淤积形态 由于不平衡输沙方程的处理方法不同,计算得到的断面平均含沙量不同,从而使河床的冲淤过程存在较大差异.采用传统方法和改进方法建立的模型 a 和 b 所计算得到的河床纵剖面变化过程见图 2.

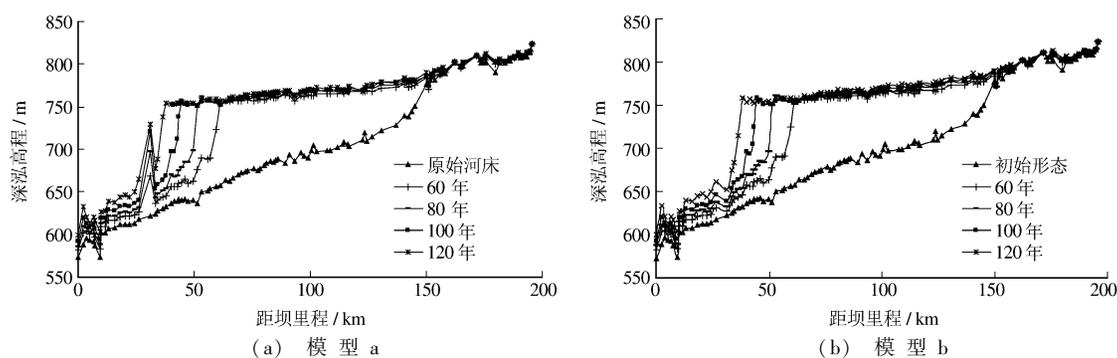


图2 采用模型 a 和 b 计算的河床纵剖面变化过程
Fig.2 Variation in longitudinal profile of the river calculated by models a and b

可见,两种方法得到的河床纵剖面变化有所差异,主要在距坝址 30 km 附近,此处正是黑水河入汇口附近.根据河流动力学理论,河宽束窄,上游断面河宽大,则流速小,水流挟沙力 S_{*0} 就小,而下游河宽小,流速大,水流挟沙力 S_{*1} 就大,泥沙淤积量就会相对较小.传统方法在支流黑水河的入汇口下断面(114#)出现了一个上凸的锯齿状,说明在该断面有大量淤积,而改进方法所得河床变形也表现为淤积,但淤积量明显小于上断面,较为合理.图 2 还表明,传统方法和改进方法的计算结果在其他断面(包括小江入汇口处的纵剖面形态)几乎完全吻合.这是因为小江支流入汇口上下游段面的河宽差别较小,直接采用传统方法(断面合并)并不会使计算结果出现偏差.而当入汇口上下游断面差别较大时,如仍采用传统方法(断面合并)来简单处理不平衡输沙方程,会导致河床变形计算失真,采用改进方法(分断面求解)的计算结果则能符合物理规律.

4 结 语

(1)不平衡输沙方程的处理方法会对含沙量和河床变形等与泥沙有关的计算结果产生较大影响,甚至使河床变形结果完全背离理论规律;

(2)两种处理方法在支流入汇口上下断面形态差别较小时,计算得到的河床变形基本一致,且都与理论分析结果相符.而对于支流入汇口上下断面形态变化较为剧烈的河段,改进方法计算结果较好,且符合物理规律;而传统方法计算结果明显违背定性分析结果;

(3)针对支流入汇提出的改进后的不平衡输沙方程解法,理论上更加完善,计算结果更符合物理规律,有利于一维水沙数学模型的进一步发展和完善.

参 考 文 献:

- [1] 杨国录,吴卫民.一维河流数值模拟算法概述[J].泥沙研究,1995,(4):34-41.(YANG Guo-lu, WU Wei-min. Summarization of one dimensional river engineering numerical model[J]. Journal of Sediment Research, 1995, (4): 34-41. (in Chinese))
- [2] 谭维炎.计算浅水动力学—有限体积法的应用[M].北京:清华大学出版社,1998:273-283.(TAN Wei-yan. Calculation for Shallow Water Hydrodynamic-Application of the FVM[M]. Beijing: Tsinghua Publishing Company, 1998: 273-283. (in Chinese))
- [3] Toro E F. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows[M]. New York: John Wiley, 2001: 199-226.
- [4] 刘勋儒,王志峰.数值模拟方法和运动界面追踪[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2001:105-116.(LIU Xun-ru, WANG Zhi-feng. Numerical Simulation Methods and Tracking for Mobile Intercell[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2001: 105-116. (in Chinese))

- [5] 刘勋儒. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 77-106. (LIU Xun-ru. Several New Methods for CFD[M]. Beijing: Science Press, 2003: 77-106. (in Chinese))
- [6] 杨国录. 河流数学模型[M]. 北京: 海洋出版社, 1992: 153-181. (YANG Guo-lu. Numerical Modelling for River Dynamics[M]. Beijing: Ocean Press, 1992: 153-181. (in Chinese))
- [7] 杨国录, 菲力蒲. 白莱德, 吕克-拉于尔, 等. 冲积河流一维数学模型[J]. 泥沙研究, 1989, (4): 41-53. (YANG Guo-lu, Philippe Belleudy, Jean-Luc Rahuel, *et al.* 1-D river engineering numerical model for alluvial river[J]. Journal of Sediment Research, 1989, (4): 41-53. (in Chinese))
- [8] 杨国录, 吴卫民. SUSBED-1 动床恒定非均匀全沙模型[J]. 水利学报, 1994, (4): 1-10. (YANG Guo-lu, WU Wei-min. A steady nonuniform sediment transport model SUSBED-1 for alluvial river[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1994, (4): 1-10. (in Chinese))
- [9] 孙昭华, 陈 飞, 郭小虎. 长江下游近河口段一维水沙数值模拟[J]. 水利水运工程学报, 2007, (3): 44-50. (SUN Zhao-hua, CHEN Fei, GUO Xiao-hu. One-dimension numerical simulation of flow and sediment in estuary reach of the Yangtze River[J]. Hydro-Science and Engineering, 2007, (3): 44-50. (in Chinese))
- [10] 陈 力, 刘青泉. 坡面流运动方程和有支流入汇时的一维明渠流方程形式[J]. 力学与实践, 2001, 23(4): 21-23. (CHEN Li, LIU Qing-quan. On the equations of overland flow and one dimensional equations for open channel flow with lateral inflow[J]. Mechanics and Engineering, 2001, 23(4): 21-23. (in Chinese))
- [11] 杨胜发, 赵志舟, 杨 斌. 支流入汇干流交界面数值模拟方法研究[J]. 重庆交通学院学报, 2002, 21(2): 115-118. (YANG Sheng-fa, ZHAO Zhi-zhou, YANG Bin. Study on the common boundary of the mainstream & the branch for numerical modeling[J]. Journal of Chongqing Jiaotong Institute, 2002, 21(2): 115-118. (in Chinese))
- [12] 张瑞瑾. 河流泥沙动力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005: 121-147. (ZHANG Rin-jin. River Dynamics[M]. Beijing: China WaterPower Press, 2005: 121-147. (in Chinese))

Improved method for non-equilibrium sediment transport equations with confluence

WANG Dang-wei¹, YANG Guo-lu¹, WANG Min¹, ZHAO Yuan-feng²

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Shenyang Water Construction Design Institute, Shenyang 110015, China)

Abstract: Based on the characteristic of the reach with confluence, an improved method for non-equilibrium sediment transport equation is brought out and then a numerical model of one dimensional steady flow with non-equilibrium sediment transport pattern is established, which has two different calculating modes for non-equilibrium sediment transport equations, i. e. the improved method and the traditional method. This model is applied in Baihetan Reservoir for calculating deformation of riverbed, and the results obtained by the two different calculating modes are compared and analyzed. Finally the results show that when the configuration of the two sections is much different, the improved method is more reasonable while the traditional method may give a false result.

Key words: confluence; non-equilibrium sediment transport equations; numerical model