# 基于SPH的自由表面流动数值模拟

刘汉涛，常建忠，安　康
（中北大学 机电工程学院，山西 太原 030051）

**摘要**：光滑粒子流体动力学方法是一种新近发展的无网格数值方法，在处理自由表面等复杂边界、流体大变形方面具有显著优势。应用该方法求解了拉格朗日形式的Navier-Stokes方程，为提高计算精度，本文通过采用两种粒子模拟固壁边界，改进了计算方法。并对湍流、粘性流体、不可压缩问题进行求解。通过二维和三维算例对近岸水动力学中波浪传播、变形、与建筑物的相互作用问题进行了数值计算，验证了其可行性，并为SPH的进一步扩展和应用奠定了基础。

**关　键　词**：光滑粒子流体动力学(SPH)；水波动力学；数值模拟；自由表面
**中图分类号**：TV13　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-640X(2009)01-0081-04

波浪传播、变形及与建筑物的相互作用问题是近岸水动力学研究的重要内容。自由表面等复杂边界、流体大变形等问题的研究是解决这类问题的关键。目前，比较有代表性的自由表面追踪方法有质点网格法[1](Particle-in-Cell，PIC)、PIC的改进算法—MAC法(Marker-and-Cell)、Nichols等[2]提出的VOF法。PIC法占用内存较大，并且只能给出自由表面单元，不能确定精确位置，在处理大变形时误差较大；MAC法虽然可研究复杂的波浪破碎问题，但仍然存在计算代价高昂及累积数值误差问题；VOF方法解决了使用大量内存存贮标记点的问题，但由于VOF函数在自由表面上并不连续，需要高精度的偏微分方程离散格式。

SPH是一种无网格自适用拉格朗日粒子法。1994年，J. J. Monagha[3]首先将SPH方法用于模拟自由表面流动，它对*N-S*方程中的对流项直接用流体质点直接处理，在处理自由表面问题上表现出了明显优势，自由表面不需要特殊计算，也不像VOF、PIC方法那样进行标记和追踪，没有常见的数值扩散现象，计算精度也高。由于SPH方法的自适应性，使SPH法的公式构造不受粒子分布随意性的影响，因此可以处理一些具有极大变形的问题，避免了拉氏方法中的网格缠结和扭曲以及网格的重划分[4,5]。但SPH法在诸如边界处理技术、数值压力稳定和紊流模型等方面进行修正和改进[6,7]。本文以SPH方法为基础，通过改进计算方法，建立了二维水动力学数值模型，并将其应用到近岸水动力问题中。

## 1　数 值 方 案

### 1.1　SPH基本理论

SPH法将流体系统用一系列空间分布的粒子来描述，粒子间不需要网格连接，粒子携带系统信息，如密度、压力、内能、速度等，并遵循拉格朗日形式的*N-S*控制方程。在SPH方法中，任一粒子的宏观变量$f(r)$都可以表示为计算域内一组无序点上的值表示成积分插值计算得到：

$$\langle f(r)\rangle=\int_{\Omega}f(r')W(r-r',h)\,\mathrm{d}r' \tag{1}$$

**收稿日期**：2008-05-07
**基金项目**：山西省青年创新基金资助项目(2008021004)，中北大学青年基金资助项目
**作者简介**：刘汉涛(1975-)，男，山东安丘人，讲师，硕士，主要从事计算流体力学的教学与科研工作。E-mail：lht@nuc.edu.cn

式中：$\Omega$ 为整个计算区域；$h$ 为光滑长度；$W$ 为光滑函数或核函数，该函数在 $r=r'$ 处是一个强尖峰函数；在 $|r-r'|>h$ 处为 0；当 $h\to 0$ 时，它是一个 $\delta$(Delta) 函数，即有 $\lim\limits_{h\to 0}\langle f(r)\rangle = f(r)$. 角括弧 $\langle\ \rangle$ 表示核近似算子，由于 $W$ 函数不是狄拉克函数，故上式的积分表示式只能是近似式．离散(1)式可以得到：$\langle f(r_i)\rangle = \sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{m_j}{\rho_j}f(r_j)W_{ij}$．同理，函数的导数积分表示及其离散方程为：$\langle\nabla\cdot f(r)\rangle = -\int\limits_{\Omega} f(r')\cdot\nabla W(r-r',h)\mathrm{d}r'$，$\langle\nabla\cdot f(r_i)\rangle = -\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{m_j}{\rho_j}f(r_j)\cdot\nabla W_{ij}$．可见，通过以上变换，将变量的空间导数转化为对插值核函数求导，无需在空间网格上离散导数.

本文的插值核函数采用三次样条函数，形式如(2)式. 其中，二维计算中取 $\alpha_D = 10/(7\pi h^2)$，三维计算中取 $\alpha_D = 1/(\pi h^3)$.

$$W(q,h)=\alpha_D\begin{cases}1-\dfrac{3}{2}q^2+\dfrac{3}{4}q^3 & 0\leqslant q\leqslant 1\\ \dfrac{1}{4}(2-q)^3 & 1\leqslant q\leqslant 2\\ 0 & q\geqslant 2\end{cases}\tag{2}$$

### 1.2 控制方程

拉格朗日的 $N$-$S$ 方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot u\tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \upsilon\nabla^2 u + F\tag{4}$$

式中：$\rho$ 为流体密度；$u$ 为速度；$p$ 为压强；$\upsilon=\mu/\rho$，$\mu$ 为动力粘性系数；$F$ 在本文中取为重力. 离散得：

$$\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} m_j V_{ij}^{\beta}\frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i^{\beta}}\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{N} m_j\left(\frac{p_i}{\rho_i^2}+\frac{p_j}{\rho_j^2}\right)\frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^{N}\frac{m_j(\mu_i+\mu_j)v_{ij}}{(\rho_i+\rho_j)^2|r_{ij}|^2}r_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial r_i} + F\tag{6}$$

压强按照状态方程求解：

$$p = B\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{r} - 1\right)\tag{7}$$

式中：$B=\rho_0 C^2/\gamma$，$\rho_0$ 为水的密度，$\gamma=7$，$C=\sqrt{200gH}$，$H$ 为水面高度.

粒子按下式移动：$\dfrac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = V_i + \varepsilon\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{m_j}{\overline{\rho_{ij}}}V_{ij}W_{ij}$，式中：$\varepsilon=0.5$；$\overline{\rho_{ij}}=(\rho_i+\rho_j)/2$.

### 1.3 边界条件

**1.3.1** *壁面边界条件* 壁面边界条件是影响计算稳定性和精度的重要因素，一般由粒子表示. 本文采用两种粒子，一种是 Monaghan 引入的 Lennard-Jones 排斥力方法的固定粒子[8]，它对靠近边界的内部粒子施加短距离排斥力；另一种粒子，当固体边界附近流体数目增加时，其密度按(5)式计算，压力按(7)式计算. 上述两种粒子既可以固定不动，也可以按某一规律做规则运动.

$$PB_{ij}=\begin{cases}D\left[\left(\dfrac{r_0}{r_{ij}}\right)^{n_1}-\left(\dfrac{r_0}{r_{ij}}\right)^{n_2}\right]\dfrac{x_{ij}}{r_{ij}}, & \left(\dfrac{r_0}{r_{ij}}\right)\leqslant 1\\ 0, & \left(\dfrac{r_0}{r_{ij}}\right)\geqslant 1\end{cases}\tag{8}$$

式中：$n_1=12$，$n_2=4$，$D$ 取最大速度平方的量级，以防止内部粒子穿透边界.

**1.3.2　自由表面边界条件**　由于处于自由表面的粒子受压小于流体内部粒子,采用 Koshizuka 等[9]的方法进行判断,若 $\rho_i<\beta\rho_0$,则 $i$ 为自由表面粒子,其压强等于大气压. 其中,$\beta=0.95$.

## 2　计 算 实 例

### 2.1　水流与结构的相互作用

矩形容器内左侧有一个水坝,右侧容器底部有一层浅水. 水坝的挡板迅速移开,水流推动底部水层,并冲向右侧物体. 容器、水坝等布置条件与 R. A. Dalrymple[10]相同,容器长 1.6 m,宽 0.6 m,高 0.3 m. 图 1 为水坝倒塌并与右侧物体作用瞬时图,由于水坝右下角具有最大压力梯度,水流涌出,波浪与地面、右侧物体及右壁发生碰撞,同时伴随着水体反弹、水花飞溅,可观察到自由表面的剧烈变形. 数值模拟用实粒子 31 000,虚粒子数 14 000. 计算结果与上述文献非常吻合,表明采用的壁面条件是可行的.

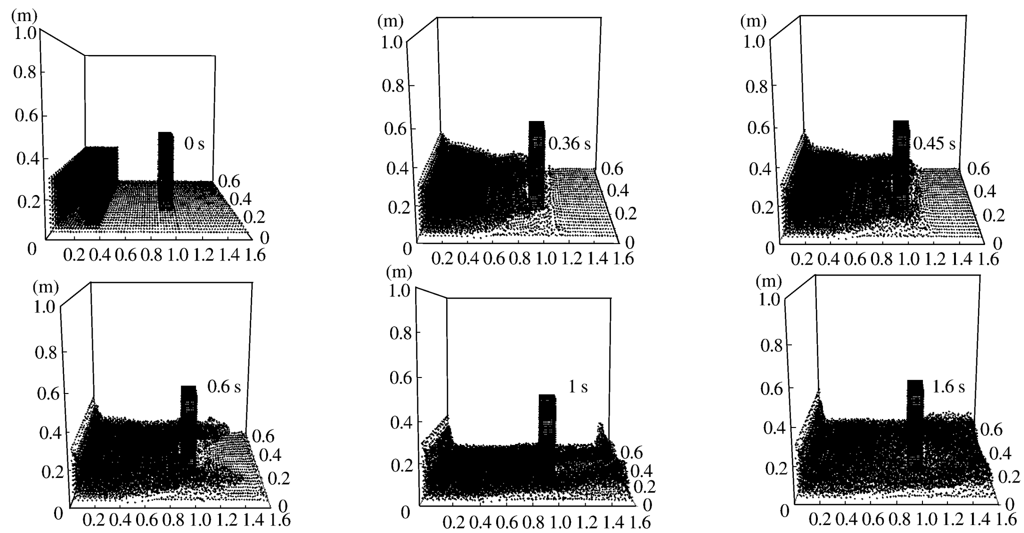


图 1　水坝倒塌后水流与物体相互作用瞬时图

Fig. 1　Interaction between water and obstacle at different times after the dam collapse

### 2.2　波浪的传播与变形

采用摇板迅速摆动产生飞溅的波浪,摇板摆动周期 0.8 s,端面摆幅 0.26 m. 水槽高 0.6 m,长 4 m,初始水深 0.3 m,水槽平底部分长 2 m,斜坡坡度 1/5. 数值模拟所用实粒子 7 762,虚粒子 439,粒子初始间距为 0.001 m,波浪飞溅与融合的粒子分布见图 2. 在 0.75 s 时,由于摇板的剧烈摆动,水体升高并开始破碎;0.9 s时被抛起的水体在重力作用下开始翻卷,翻卷水体的前峰开始接触前方水面;1 s 时翻卷水体的击打水面引起飞溅;1.3 s 时,翻卷水体和下方水体融合. 从图中可以明显分辨出水体的飞溅及融合,验证了所采用模型及边界条件的可靠性,表明 SPH 方法可用于自由表面流动及不连通区域波浪传播的模拟.

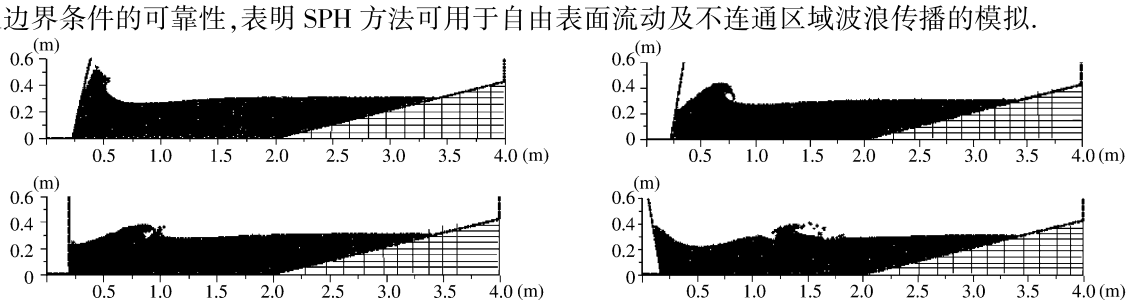


图 2　不同时刻波浪飞溅与融合瞬时图

Fig. 2　The splash and fusion of the wave at different times

## 3 结 语

基于拉格朗日形式的SPH方法为研究自由表面的流体流动及与物体的相互作用细节提供了一种方法.应用该方法求解了拉格朗日形式的Navier-Stokes方程,通过计算方法的改进,对波浪传播、变形、与建筑物的相互作用问题进行了数值计算.结果表明,在描述大变形后自由表面的形状以及波浪的飞溅、传播过程中,SPH具有明显优势.

**参 考 文 献:**

[1] Harlow F H, Welch F J. Numerical calculations of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface[J]. **Phys Fluids**, 1965, 8: 2182-2189.

[2] Nichols B D. SOLA-VOF: A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free-boundaries[R]. **Los Alamos Scientific Laboratory**, 1980.

[3] Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. **Journal of Computational Physics**, 1994, 110: 399-406.

[4] Oger G, Doring M, Alessandrini B. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries[J]. **Journal of Computational Physics**, 2006, 213: 803-822.

[5] 季顺迎, 岳前进. 辽东湾区域性漂移海冰的SPH数值模拟[J]. 水利水运工程学报, 2001, 4: 9-15. (JI Sun-ying, YUE Qiang-jin. Numerical simulation of local drifting sea ice in Liaodong Bay by smoothed particle hydrodynamics method[J]. **Hydro-Science and Engineering**, 2001, (4): 9-15. (in Chinese))

[6] Oger G, Doring M, Alessandrini B. An improved SPH method: towards higher order convergence[J]. **Journal of Computational Physics**, 2007, 225: 1472-1492.

[7] Carla Antoci, Mario Gallati, Stefano Sibilla. Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH[J]. **Computers & Structures**, 2007, 85: 879-890.

[8] 韩 旭, 杨 刚, 强洪夫. 光滑粒子流体动力学——一种无网格粒子法[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 2005: 136-137. (HAN Xu, YANG Gang, QIANG Hong-fu. Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method[M]. Changsha: Hunan University Press, 2005: 136-137. (in Chinese))

[9] Koshizuka S, Oka Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid[J]. **Nuclear Science and Engineering**, 1996, 123: 421-434.

[10] Dalrymple R A, Rogers B D. Numerical modeling of water waves with the SPH method[J]. **Coastal Engineering**, 2006, 53: 141-147.

# Numerical modeling of free surface flows with SPH method

LIU Han-tao, CHANG Jian-zhong, AN Kang

(*School of Mechatronice Engineering of North University of China*, *Taiyuan* 030051, *China*)

**Abstract**: The smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a relatively new method, which has advantages in dealing with complicated free surfaces and nonlinear breaking waves. The Navier-Stokes (*N-S*) equations of Lagrangian form are solved. In order to improve the computational precision, two types of particles are used to simulate the wall, and the improvements have been implemented to handle turbulence, fluid viscosity and density. Two computation cases of the wave's propagation, transformation, breaking and the fluid-structrue interactions are compared with other literatures. It is a foundation of our SPH code for further extension and application.

**Key words**: smoothed particle hydrodynamics (SPH); water wave dynamics; numerical simulation; free surface flow