## 无限深透水地基上土石坝坝基垂直防渗的 保角变换渗流计算

### 毛海涛,侍克斌,李玉建

(新疆农业大学 水利与土木工程学院, 新疆 乌鲁木齐 830052)

**摘要:**近年来,在无限深透水地基或深厚覆盖层地基上修建土石坝的水利工程日趋增多,且有很多采用倒悬挂 式防渗墙进行渗流控制.对于这种坝型的渗流计算,尚缺乏精确而简捷的理论公式,常采用近似的估算或经验 公式.本文采用保角变换的方法,通过建立数学模型推导出在均质且理想边界条件下,土石坝基垂直防渗的渗 透压力、渗流量和出逸坡降计算公式.公式简单,不仅可以计算渗透坡降和坝基渗流量,还可以计算渗透压力的 分布,且相对于有限元和边界元计算模型,其计算量要小的多,计算结果的精度也能满足要求.

**关 键 词:**无限深透水地基; 渗流; 垂直防渗墙; 保角变换; 土石坝 中图分类号: TV641 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-640X(2008)04-0071-07

# Seepage calculation of earth-rockfill dams with vertical cut-off wall on infinite deep pervious foundation by using transformation method

MAO Hai-tao, SHI Ke-bin, LI Yu-jian

(Hydraulic and Civil Engineering Institute of Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China)

**Abstract**: In recent years, more and more hydraulic projects are built on the infinite deep pervious foundation and many of them take the hanging cut-off walls to solve the seepage control of dam foundation problems. But as for the seepage calculation of these dams, there is not any accurate theoretical formula. As a result, approximate formulas or empirical functions are often used. In this paper the conformal transformation method is used to get the inferential reasoning formulas: seepage pressure formula, seepage discharge formula and seepage gradient formula. The formulas are simple, not only to calculate the average seepage gradient and seepage discharge, but also to calculate the distribution of the seepage pressure. Ascompared with boundary element model and finite element model, their computation load is smaller. The calculation accuracy can meet engineering demand.

Key words: infinite deep pervious foundation; seepage; vertical cut-off wall; conformal transformation; earthrockfill dam

收稿日期: 2008-02-10

**基金项目**:新疆水利水电重点科学基金资助项目(xjzdxk-2002-10-05);新疆高校科研计划重点项目基金(xjedu2005 I 09) 作者简介:毛海涛(1981-),男,山西运城人,博士研究生,主要从事坝体材料研究. E-mail: maohaitao1234@163.com

当透水坝基深度大于建筑物不透水底部长度的1.5 倍以上时,可视为无限深透水坝基<sup>[1]</sup>.有学者认为无限深透水地基按理论计算渗流量将很大,所以不宜在这种地基上建坝<sup>[2,3]</sup>.但从实际建设经验来看,在无限 深透水地基上修建大坝,其渗流破坏和渗流量是可防可控的,并且,我国许多可开发的大坝都将建在无限深 或较深厚的覆盖层地基上.对于这种坝型,目前国内外已有的方法是按有效深度的概念转化成有限深地基, 按有限深地基进行计算<sup>[4]</sup>.本文采用保角变换的方法,建立数学模型推导出无限深透水地基上土石坝垂直 防渗的渗透压力、渗流量和出逸坡降计算式.对于了解实际工程的渗流场分布和变化规律有一定的参考 价值.

1 模型理论概述

根据复变函数理论,正则复变函数 w = f(z) = U(x,y) + iV(x,y) 的实数部分和虚数部分满足柯西-黎曼 方程,即:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

这也是不可压缩流体的稳定平面流动的势函数  $\Phi$ 和流函数  $\Psi$  必须满足的方程. 在渗流区域 D 中,函数 f(z) = U + iV 是处处连续且可微的,故可推出在 D 内有:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = 0 \tag{2}$$

这就是渗流连续的拉普拉斯方程.

如果一个正则复变函数在某一区域有定义,则其可 以通过一定的转换式,将此区域的复平面转换到另外一 个区域的复平面上,且上述正则复变函数在新的域内仍 有意义(见图1)<sup>[5]</sup>.

利用克力斯托弗--席瓦尔兹定理可以将一个多边形内域转换为一个半平面.

$$Z = f(\zeta) = A \int (\zeta - a_1)^{\beta_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\beta_2 - 1} \cdots (\zeta - a_n)^{\beta_n - 1} d\zeta + B$$
(3)

式中: *Z*平面上的复数, *Z* = *x* + i*y*; *ζ*平面上的复数, *ζ* =  $\varepsilon$  + i $\eta$ ; *a*<sub>1</sub>, *a*<sub>2</sub>, …, *a*<sub>n</sub>为相应多边形顶角*A*<sub>1</sub>, *A*<sub>2</sub>, …, *A*<sub>n</sub>的 点经转换后在 $\varepsilon$ 轴上的坐标;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , …,  $\beta_n$ 为相应多边形的内角除以 $\pi$ 所得值; *A* 和 *B* 为复常数, 由边界条件 确定.

对于上述的退化情形,多边形如果有一个或者几个顶点在无穷远处,可以将该多边形称为广义多边形, 公式(3)仍然有效,但要去掉式中关于无穷远点的因子,且点在无穷远处的角度用这两条直线在有限点的那 个交角的反号代替<sup>[6]</sup>.

2 数学模型的建立

#### 2.1 坝基渗流机理分析

巴普洛夫斯基认为,在透水地基上修建土石坝,渗流计算可以将大坝和地基分别计算,总渗流量为二者 总和<sup>[4]</sup>.计算坝基渗流时,可不考虑坝体渗流,低于坝基及防渗墙部分作以下3点假设:

(1)坝基为均质透水地基<sup>[7]</sup>;



#### (2)防渗墙均不透水;

(3)垂直防渗墙的厚度在转化时不予考虑.

根据上述假设,建立在无限深透水地基上带有垂直防渗墙 的土石坝的渗流情况见图 2.

图 2 表明坝基渗流全部从防渗墙下端逸出.因此,可将土石 坝下的不透水轮廓线和渗流边界看作是一个广义多边形,应用 上述保角变换理论可将其变换到另一个半平面,使多边形的各 边转换到半平面的实轴上.这样,曲折的基础线转化成直线,原 来的多边形基础就可转化成相应的线型基础.渗流区域内的等 势线和流线为两组相互正交的双曲线和椭圆线的方程是已知 的<sup>[8]</sup>,因此,通过保角变换可推导出大坝坝基的渗流计算式.



坝基渗流示意图

Fig. 2 Sketch of the infinite deep pervious foundation seepage with cut-off wall

#### 2.2 模型的建立

积分化简得:

对于建立在无限深透水地基上采用倒悬挂式防渗墙的土石坝,可将其坝基看成一个广义四边形 MBCD,

其中点 M 为无穷远点(见图 3(a)),图中 A, E 点分别 为上下游坝脚所在位置.令上游坝脚 A 到防渗墙的距 离 AB = m,下游坝脚 E 到防渗墙的距离 ED = n(见图 2),利用(3)式可将 Z 平面的四边形坝基转化到  $\zeta$  平 面的实轴  $\varepsilon$  上(见图 3). 广义四边形 MBCD 的转化为 直线基础的公式如下:

$$Z = f(\zeta) = A \int (\zeta - a_b)^{\beta_b - 1} (\zeta - a_c)^{\beta_c - 1}$$

$$(\zeta - a_d)^{\beta_d - 1} d\zeta + B$$
(4)

设防渗墙的深度为 h,多边形各个顶点及对应点的已知量见表 1(点  $a_j$ , j=m, b, c, d 中的 3 个是任意给定的,第4 个暂时用  $\xi$  来表示).因为 AM 与 EM 实为同一条线,即它们的夹角为  $\pi$ ,则在无穷远点 M 的顶角等于— $\pi$ .





Tab. 1 Known parameters of the generalized quadrilateral-MBCD						
下标 <i>j</i>	$A_j$	$oldsymbol{eta}_j$	$a_j$			
m	œ	-1	œ			
b	0	1/2	-1			
С	$h_i$	2	0			
d	0	1/2	Ĕ			

表1 广义四边形 MBCD 已知量对应表

利用对称原理可以确定  $a_d = \xi = 1.$  将表 1 中的已知量代入(4)式得:

$$Z = f(\zeta) = A \left[ (\zeta + 1)^{-\frac{1}{2}} \zeta (\zeta - 1)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + B \right]$$
(5)

$$Z = \pm A \sqrt{\zeta^2 - 1} + B \tag{6}$$

利用对应关系得: A = h, B = 0则所求函数为:  $Z = \pm h \sqrt{\zeta^2 - 1}$ 

其反函数为: 
$$\zeta = \sqrt{\pm 1 + \left(\frac{z}{h}\right)^2}$$
 (8)

(7)

(8)式即为将无限深透水地基上设有垂直防渗墙基础转化为水平基础的转换式. 这样将 Z 平面内的 A 点和 E 点的坐标代入转换式,可得到在 ζ 平面上相应的坐标值:

$$\varepsilon_a = -\sqrt{1 + \left(\frac{m}{h}\right)^2} \tag{9}$$

$$\varepsilon_e = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{n}{h}\right)^2} \tag{10}$$

则 *ABCDE* 转换为 *A'B'C'D'E*'水平基础,其宽度为 2*b*,由图 3(b)可知: 2*b* =  $\varepsilon_e - \varepsilon_a$ ,其中  $\varepsilon_a$  位于负实轴上,为负值.

显然,*Z*平面上的水平长度和竖直长度在 $\zeta$ 平面的实轴  $\varepsilon$ 上的引化长度不相等.因此,须将 $\eta$ 轴向一侧平移,使新的 垂直轴 $\eta'$ 刚好位于 $\varepsilon_a, \varepsilon_e$ 之间,也就是引化长度的中点(见 图 4).其移动的距离为:

$$s = \frac{1}{2} (\varepsilon_a + \varepsilon_e) \tag{11}$$

把 $\eta$ 轴平移后的坐标平面称为 $\zeta$ '平面, $\zeta$ 平面和 $\zeta$ '平面 的坐标关系如下:

$$\eta' = \eta \tag{12}$$



上述步骤将带有垂直防渗墙大坝的多边形基础转化为一个垂直轴位于基础宽度中点的化引基础,从而 可以按水平基础求得需要的解答.

3 渗流计算式的推导

#### 3.1 渗透压力计算式推导

水平基础渗透特性复数函数公式为:

$$\zeta' = b \cos \pi \omega \tag{13}$$

式中: $\omega = \Phi + i\varphi, \zeta' = \varepsilon' + i\eta', 其中 \Phi, \varphi$ 分别为单位势函数及单位流函数(即假定渗透系数k和水头H均为单位值时的势函数和流函数)<sup>[9]</sup>.

将 b 和 ζ'代入(13)式,并用反函数表示为:

$$\omega = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{\zeta - \frac{1}{2} (\varepsilon_a + \varepsilon_e)}{\frac{1}{2} (\varepsilon_e - \varepsilon_a)}$$
(14)

因为基础的轮廓线是一条流线,其流函数  $\varphi=0$ ;对于水平基础  $\eta=0$ ,所以(14)式可改写为:

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{\varepsilon - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_e)}{\frac{1}{2}(\varepsilon_e - \varepsilon_a)}$$
(15)

由此可求出任意点的渗透压力

$$p = \Phi H = \frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\varepsilon - \frac{1}{2} (\varepsilon_a + \varepsilon_e)}{\frac{1}{2} (\varepsilon_e - \varepsilon_a)}$$
(16)

式中:
$$\varepsilon = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{Z_{x}}{h}\right)^{2}}$$
,代人 s 和 b,(16)式可表示为:

$$p = \Phi H = \frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\pm \sqrt{1 + \left(\frac{Z_{\mathcal{R}}}{h}\right)^2} - s}{b}$$
(17)

式中:*H* 为大坝上下游的水位差;*h* 为垂直防渗墙深度;*Z*<sub>\*</sub> 为拟求点在 *Z* 平面的坐标.式中的正负号可以根据拟求点在 *Z* 平面的正负确定.这样,由 *Z* 平面上 *A*、*E* 点的坐标及拟求点的坐标 *Z*<sub>\*</sub>,即可求得大坝基础下拟求点的渗透压力值.

#### 3.2 下游出逸点的平均坡降计算式推导

由(17)式求出基础底部各点的渗透压力后,就可以很容易推导出下游各点的出逸坡降.为了简化起见, 取防渗墙后 D 点作为下游各点的参照点.因为 D 点与下游各点在 Z 平面上位于同一水平线,故下游拟求点 M 处的平均坡降计算式为:

$$J = \frac{P_d - P_m}{L} \tag{18}$$

式中:J为下游拟求点处平均出逸坡降; $P_d$ 为防渗墙后 D点的渗透压力; $P_m$ 为下游拟求点 M的渗透压力; L为D到 M的水平距离.

#### 3.3 渗透流量计算式推导

计算无限深透水地基下的渗透流量时,可取某一入渗长度来考虑.现推求无限深透水地基上设有垂直防 渗墙大坝的基础的单宽渗透流量计算式.

在下游河床线上 $\Phi=0, \eta'=0.$ 故(13)式可改写为: $i\psi = \frac{1}{\pi}\cos^{-1}\frac{\varepsilon'}{b}$ ,根据稳定势流原理有: $v_{\eta'} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon'}$ ,因为

 $\Phi = 0$ ,故有 $\frac{\partial \Psi}{\partial s'} = \frac{\partial \Psi}{\partial s'}$ ,其中: $\Phi$ 为势函数; $\Psi$ 为流函数; $v_{\eta'}$ 为渗流的出逸流速.由此可得:

$$v_{\eta'} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon'} = kH \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon'} = \frac{kH}{\pi \sqrt{\varepsilon'^2 - b^2}}$$
(19)

(19)式中的入渗流速向量的方向向下,与坐标轴正方向一致,所以可得单位宽度上的渗透流量:

$$q = \int_{-\varepsilon_a'}^{-\varepsilon_m} v_{\eta} d\varepsilon' = \frac{kH}{\pi} \ln\left(\frac{-\varepsilon_m'}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{-\varepsilon_m'}{b}\right)^2}\right)$$
(20)

将 $\varepsilon'_m = \varepsilon_m - s = -\sqrt{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2} - s$ 代入得:

$$q = \frac{kH}{\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2} + s}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2} + s}{b}\right)^2} \right)$$
(21)

式中:H为大坝上下游的水头差;h为垂直防渗墙深度;l为上游入渗点到防渗墙的水平距离;k为坝基的渗透 系数.

#### 4 工程实例计算

恰拉水库位于新疆兵团农二师塔里木垦区.该水库为灌注式平原水库,库容1.38×10<sup>8</sup> m<sup>3</sup>,库区出露地层 主要为第四系冲积物和风积物,主要岩性为粉砂、粉细砂.坝基地层主要为粉细砂强透水层,在设计中按无限 深透水地基考虑.水库主坝东坝坝段高7.5 m,坝前最大水深6.5 m,坝顶宽5 m,迎水坡1:2.5,坝后1:2, 经地质勘察坝基渗透系数为5.41 m/d,允许渗透坡降0.1,坝体采用斜墙防渗,坝基防渗方案之一是倒悬挂 式防渗墙(工程最终采用的是12 倍水头的水平铺盖防渗方案)<sup>[10]</sup>,垂直防渗墙深度拟为20 m. 计算简图见 图5.



因う 相互小伴坐且的修力术间化的火坐及十两权伏因

Fig. 5 Complex variables planar conversion of Qia-la Reservoir foundation with vertical cut-off wall

#### (1)求解基础渗透压力分布

已知:H=6.5 m,上游水平段 AB=0,即  $Z_a=0$ ,由(9)式求得  $\varepsilon_a=-1$ ;下游水平段 DE=38.75 m,即 $Z_e=38.75 \text{ m}$ ,由(8)式求得  $\varepsilon_e=2.180$ .故化引水平基础宽为:2b=3.180; $\eta$ 轴平移距离 s=0.590.计算得: $\varepsilon'_a=-1.590$ , $\varepsilon'_e=1.590$ ,转化为水平基础见 3(b)所示.由(15)式得:

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{\varepsilon - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_e)}{\frac{1}{2}(\varepsilon_e - \varepsilon_a)} = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \frac{\varepsilon - 0.590}{1.590}$$

根据(16)式求得基础下各点的渗透压力(见表2).

表 2 大坝基础各计算点的渗透压力

Tab. 2	Seepage	pressure	of	the 6	calculatio	n points	on	the	dam	found	lation
--------	---------	----------	----	-------	------------	----------	----	-----	-----	-------	--------

计算点	ε	$\varepsilon' = \varepsilon - s$	arepsilon'  eq b	$\Phi$	渗透压力/ m
A(B)	-1.000	-1.590	-1.000	1.000	6.500
$P_{1}$	-0.866	-1.457	-0.916	0.869	5.649
С	0.000	-0.590	-0.371	0.621	4.037
$P_2$	0.866	0.275	0.173	0.445	2.893
D	1.000	0.409	0.257	0.417	2.711
$P_3$	1.118	0.527	0.331	0.393	2.555
$P_4$	1.414	0.823	0.518	0.327	2.126
$P_5$	1.803	1.212	0.762	0.224	1.457
$P_6$	2.016	1.425	0.896	0.146	0.95
<i>E</i>	2.180	1.590	1.000	0.000	0.000

表 2 中, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub>, P<sub>6</sub> 为中间插入点(见图 5), 坐标分别为 10i、10i、10、20、30、35. 计算结果表明, 通过防渗墙时的渗透压力梯度变化最为明显, 渗透压力被大大削弱.

(2)求解下游出逸坡降

由表2计算结果可知D点的渗透压力为2.711 m,出逸点的E的渗透压力为0,代入(18)式可得逸点的 坡降为:

$$J = \frac{P_d - P_e}{L} = \frac{2.711 - 0}{38.75} = 0.070 < 0.1$$

满足出逸渗透坡降要求.

#### (3)求解上游单宽入渗流量

计算单宽流量时,需设定上游 *M* 点的位置,即上游入渗长度 *L* 值,根据水库相关资料,取 *L*=25 m,即  $X_a = -25$  m,得  $\varepsilon_m = -1.601$ ;渗透系数 k = 5.41 m<sup>3</sup>/d;又因为 b = 1.590, s = 0.590,  $\varepsilon'_m = -2.191$ ,代入(21)式得:  $q = \frac{kH}{c}ch^{-1} - \frac{\varepsilon'_m}{b} = 12.501$  m<sup>3</sup>/ (d·m).

由于这种坝型的渗流计算尚无理论解可比较<sup>[4]</sup>,但《碾压式土石坝设计规范》规定:对于1级、2级坝及高坝,应用计算机和有限元等数值分析法,并可采用二维、三维计算程序等辅助计算<sup>[1]</sup>.袁莹<sup>[10]</sup>针对上述相同工程实例,应用边界元结合计算机辅助编程计算得出的渗透坡降和渗流量分别为0.081和12.561 m<sup>3</sup>/(d·m).本文计算结果与之较为接近.

#### 5 结 语

修筑在无限深透水地基上的土石坝,其坝基的垂直防渗渗流控制计算理论还不成熟.本文通过理论分析,推导了均质地基无限深透水地基上土石坝垂直防渗的渗流计算式,不仅可以计算出渗透坡降和渗透流量,还可计算渗透压力的分布,相对于边界元和有限元计算模型,其计算量要小的多,计算结果也有足够的精度.当然,由于本文的计算模型是针对均质地基而建立的,计算边界也很理想化,对于较复杂的分层地基和边界条件,可以采用等效渗透系数法和概化边界对地基进行处理,从而应用本文公式进行粗略计算,但对于更复杂的无限深地基的渗流计算还需进一步探究.

#### 参考文献:

- [1] SL-274, 碾压式土石坝设计规范[S].
- [2] Sherrd J L. Trends and Debatable Aspects in Embankment Dam Engineering [J]. Water Power and Dam Construction, 1984, (9): 29-32.
- [3] 王柏乐. 中国当代土石坝工程[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2004: 374-375.
- [4] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2003: 110-113.
- [5] 胡家延, 彭旭麟. 复变函数[M]. 北京:高等教育出版社, 1986: 233-245.
- [6] Ewa, Hermanowicz, Hakan Tohamsson. A complex variable fractional delay for filter structure [J]. Transactions on Circuits and System Express, 2007, 154(9): 785–789.
- [7] 周保中. 无限深透水地基上不透水铺盖斜墙土坝渗流计算[J]. 水利学报, 1981, (5): 61-68.
- [8] Seok-won Lee, Jong-won Jung, Seok-woo Nam, et al. The influence of seepage forces on ground reaction curve circlar opening
   [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2007, 122(1): 28-38.
- [9] Ding Hong-yan. Estimation of heights of soil plug inside bucket foundations during section penetration by deformable discrete element modeling[J]. Transactions of Tianjin University, 2007, (4): 77-81.
- [10] 袁 莹. 无限深透水地基上土石坝坝基渗流控制计算模型及有关问题研究[D]. 乌鲁木齐: 新疆农业大学, 2007.